ÕPIOBJEKT

„Sissejuhatus maatriksalgebrasse“

Tanel Kaart

http://ph.emu.ee/~ktanel/maatriksalgebra1/

Euroopa Liit
Euroopa Sotsiaalfond

Eesti tuleviku heaks

Õpiobjektid -> Sissejuhatus maatriksalgebrasse

SISSEJUHATUS MAATRIKSALGEBRASSE

ÕPIOBJEKTI KIRJELDUS | DEFINITSIOONID | MAATRIKS-OPERATSIOONID | MAATRIKSTEHTED *MS EXCEL'S* | ENESEKONTROLL | SISUKORD

ÕPIOBJEKTI KIRJELDUS

Õppekava: Loomakasvatus (449)

Õppeaine: VL.0192 Loomade aretusväärtuse hindamine ja aretusprogrammid

Maht: 15 tundi

Sihtrühm: Loomakasvatuse õppekava magistrandid

Eesmärk: Õpiobjekti eesmärk on toetada õppeaine omandamist

Õpiobjekti läbinu:

- on tutvunud maatriksite peamiste tüüpidega ja standardsete maatriksoperatsioonidega;
- on tuttav maatriksoperatsioonide vaheliste seostega;
- tunneb maatrikstehete teostamise võimalusi *MS Excel*is;
- omab võimalust enesekontrolliks.

Õppejõud ja tehniline teostus: Tanel Kaart

Kogu materjal ühe pdf-failina: sissejuhatus_maatriksalgebrasse.pdf

Eesti Maaülikool

sügissemester 2010

SISSEJUHATUS MAATRIKSALGEBRASSE

1 DEFINITSIOONID

1.1 Maatriks, vektor, skalaar

Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse (tabelisse) paigutatud elementide hulka. **Elementideks** võivad olla arvud, matemaatilised avaldised, teised maatriksid. Maatrikseid tähistatakse tavaliselt trükitähtedega ja nende elemente vastavate kirjatähtedega, lisades vajadusel indeksid.

Näiteks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **dimensiooniks** (**järguks**, **suuruseks**) nimetatakse tema ridade ja veergude arvu.

Näiteks ülaltoodud maatriks **A** on 2×3-maatriks.

Vahel näidatakse maatriksi järk ära alumises indeksis **-** $\mathbf{A}_{2\times3}$.

Vektoriks nimetatakse maatriksit, millel on vaid üks rida või üks veerg, ja kõneldakse siis vastavalt rea- või veeruvektorist. Kui pole täpselt määratletud, kas on tegu rea- või veeruvektoriga, mõistetakse vektori all veeruvektorit. Vektori elementide tähistamisel kasutatakse vaid üht indeksit.

Näiteks $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Skalaariks nimetatakse maatriksit, millel on 1 rida ja 1 veerg, s.t. 1×1-maatriksit.

Näiteks $\lambda = 1$.

1.2 Erikujulised maatriksid

Ruutmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdsed. Vastasel juhul on tegu **ristkülikmaatriksiga**. Kõik vektorid on ristkülikmaatriksid.

Diagonaalmaatriksiks nimetatakse ruutmaatriksit, mille kõik väljaspool peadiagonaali paiknevad elemendid võrduvad nulliga ($d_{ij} = 0$, kui $i \neq j$).

Näiteks $\mathbf{D}_{n\times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Ühikmaatriksiks nimetatakse diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega. Ühikmaatriksit tähistatakse:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid allpool (ülalpool) peadiagonaali võrduvad nulliga, nimetatakse **alumiseks** (**ülemiseks**) **kolmnurkmaatriksiks**.

Näiteks maatriksid $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ on vastavalt ülemine ja alumine

kolmnurkmaatriks.

Sümmeetriline maatriks on ruutmaatriks, mille ülalpool peadiagonaali paiknevad elemendid on võrdsed vastavate allpool peadiagonaali paiknevate elementidega, s.t. element a_{ij} on võrdne elemendiga a_{ji}.

Näiteks maatriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline, sest $a_{12} = a_{21} = 6$, $a_{13} = a_{31} = 8$ ja

$a_{23} = a_{32} = 3$.

1.3 Blokkmaatriksid

Blokkmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille elementideks on omakorda maatriksid.

Näiteks $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kus $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = 1\ \ 2$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2 MAATRIKSOPERATSIOONID

2.1 Liitmine ja lahutamine

Kahte maatriksit saab **liita** ja **lahutada** vaid siis, kui neil on sama arv ridu ja veerge, s.t. nad on sama järku. Maatrikseid liidetakse ja lahutatakse elementide kaupa. Seega, kui maatriks **C** = **A** + **B** ja **E** = **A** – **B**, siis $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ja $e_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$.

Siis $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40+7 & 21+5 \\ 35+(-6) & -20+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 26 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40-7 & 21-5 \\ 35-(-6) & -20-32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 41 & -52 \end{pmatrix}$.

2.2 Korrutamine

Maatriksi **korrutamisel skalaariga** korrutatakse sellega läbi maatriksi iga element.

Näide. $k = 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$. Siis $k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\times 40 & 2\times 21 \\ 2\times 35 & 2\times(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 42 \\ 70 & -40 \end{pmatrix}$.

Kahte maatriksit saab **omavahel korrutada**, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga. Korrutismaatriksi ridade arv on võrdne esimese maatriksi ridade arvuga ja veergude arv teise maatriksi veergude arvuga – $\mathbf{C}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times m}$. Korrutismaatriksi element kohal *ij* (reas *i* veerus *j*) leitakse kui esimese maatriksi *i*-nda rea ja teise maatriksi *j*-nda veeru vastavate elementide korrutiste summa – $c_{ij} = \sum_{h=1}^{k} a_{ih} b_{hj}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **C = AB** elemendid leitakse järgmiselt:

$c_{11} = 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + (-1)\cdot 6 = 12$ (maatriksi **A** 1. rida korrutatuna maatriksi **B** 1. veeruga),
$c_{21} = 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 0\cdot 6 = 24$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{31} = 3\cdot 2 + 6\cdot 4 + 1\cdot 6 = 36$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{12} = 1\cdot 5 + 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 16$ (**A** 1. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{22} = 2\cdot 5 + 5\cdot 3 + 0\cdot 1 = 25$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{23} = 3\cdot 5 + 6\cdot 3 + 1\cdot 1 = 34$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 2. veeruga).

Seega $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 25 \\ 36 & 34 \end{pmatrix}$.

Seejuures on maatriks **C** 3×2-maatriks, kus 3 on maatriksi **A** ridade arv ja 2 on maatriksi **B** veergude arv.

Omadused

1. **AB** ≠ **BA**.
2. **IA** = **AI** =**A**, kus **I** on ühikmaatriks.
3. **ABC** = **A**(**BC**) = (**AB**)**C**.
4. **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**.

2.3 Maatriksite otsekorrutis

Maatriksite $\mathbf{G}_{n\times m}$ ja $\mathbf{A}_{t\times s}$ **otsekorrutiseks** (**Kroneckeri korrutiseks**) nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}.$$

Saadud korrutismaatriks on järku $nt\times ms$.

Näide. $\mathbf{G}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 20\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\otimes\mathbf{G}=\begin{pmatrix}10 & 0 & 20 & 5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 40 & 0 & 5 & 20\\ 10 & 40 & 10 & 5 & 20 & 5\\ 5 & 0 & 10 & 20 & 0 & 40\\ 0 & 5 & 20 & 0 & 20 & 80\\ 5 & 20 & 5 & 20 & 80 & 20\end{pmatrix}$.

Otsekorrutis leiab rakendust mitmemõõtmelisel analüüsil, s.t. kui soovitakse korraga hinnata faktorite mõju enam kui ühele tunnusele (näiteks geneetilise korrelatsiooni arvutamisel).

2.4 Transponeerimine, ortogonaalsed ja idempotentsed maatriksid

Maatriksi **A transponeeritud** maatriks, mida tähistatakse tavaliselt **A**' või $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, saadakse, vahetades esialgse maatriksi read ja veerud, s.t. kui $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, siis $b_{ji} = a_{ij}$.

Näide. Kui $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, siis $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Omadused

1. Kui **A** on sümmeetriline, siis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Maatriksit nimetatakse **idempotentseks**, kui tema korrutis iseendaga annab tulemuseks iseenda, s.t. maatriks **A** on idempotentne, kui **AA** = **A**. Vaid ruutmaatriks saab olla idempotentne.

Ortogonaalne maatriks on ruutmaatriks, mille korrutis oma transponeeritud maatriksiga võrdub ühikmaatriksiga – maatriks **U** on ortogonaalne, kui $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

2.5 Determinant

Olgu maatriks **A** 2×2-maatriks. Tema **determinandiks** nimetatakse suurust $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Vahel tähistatakse determinanti ka det(**A**). Enam kui kahedimensionaalse ruutmaatriksi determinant on leitav valemist

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|,$$

kus $\mathbf{A}_{ij}$ on maatriksi **A** alammaatriks, mis on saadud esialgsest maatriksist *i*. rea ja *j*. veeru ärajätmise tulemusena. Sellist alammaatriksit nimetatakse **miinoriks**.

Maatriksit nimetatakse **singulaarseks**, kui tema determinant võrdub nulliga ja **mittesingulaarseks**, kui tema determinant on nullist suurem.

Omadused

1. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.
2. Kui maatriksid **A** ja **B** on sama järku ruutmaatriksid, siis $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
3. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$, **A** on $n\times n$-maatriks ja α suvaline skalaar.
4. $|\mathbf{I}_n| = 1$.
5. Kui maatriks sisaldab kahte või enamat võrdset (või lineaarselt sõltuvat – vt 1.2.7) rida või veergu, siis tema determinant võrdub nulliga.

6. Diagonaalmaatriksi determinant võrdub tema diagonaalielementide korrutisega, s.t. kui
$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix},\ \text{siis } |\mathbf{D}|=\prod_{i=1}^{n} d_{ii}\ .$$

Näide. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Võttes $i=1$, s.t. kasutades arvutamisel maatriksi **A** esimese rea elemente ja nendele vastavaid miinoreid, avaldub determinant kujul

$$|\mathbf{A}|=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=\ 1\cdot(3-4)\ -\ 1\cdot(1-2)\ +\ 1\cdot(2-3)\ =-1.$$

Sama tulemuse saaksime ka teisi ridasid (s.t. $i=2$ või 3) aluseks võttes, samuti kasutades rea asemel veergu ja sellele vastavaid miinoreid.

2.6 Pöördmaatriks

Maatriksi **A pöördmaatriks** $\mathbf{A}^{-1}$ on maatriks, millega esialgset maatriksit vasakult või paremalt korrutades on tulemuseks ühikmaatriks – $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ ja $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$. Pöördmaatriks leidub igal mittenullilise determinandiga (mittesingulaarsel) ruutmaatriksil.

Üldine valem maatriksi **A** pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ elementide leidmiseks on järgmine

$$a_{ij}^{-1}=\frac{(-1)^{i+j}\,|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{ij}|}{|\mathbf{A}|},$$

kus a_{ij}^{-1} tähistab maatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ ij.-t elementi ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{ij}$ on maatriksi **A** transponeeritud maatriksi $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ij. miinor.

Kui A on 2×2-maatriks, avaldub tema pöördmaatriks kujul

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Näide. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8\cdot 4-6\cdot 4}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}75 & 1 \end{pmatrix}$.

Pöördmaatriks leiab rakendust näiteks **lineaarvõrranditesüsteemide lahendamisel**: korrutades maatriksvõrduse

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$$

mõlemad pooled vasakult läbi kordajate maatriksi **A** pöördmaatriksiga, saame lahendivektori **x** kujul

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}.$$

Näide. Olgu meil tarvis lahendada lineaarvõrranditesüsteem $\begin{cases} -x+3y=7 \\ 2y+z=13 \\ x+4z=5 \end{cases}$.

Sama süsteem maatrikskujul on $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$,

millest $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1{,}6 & 2{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

ehk $x=17$, $y=8$ ja $z=-3$.

Omadused

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$, kui **A** on mittesingulaarne.
3. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.
4. $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; **A**, **B**, **C** - mittesingulaarsed.
5. Diagonaalmaatriksi pöördmaatriks on samuti diagonaalmaatriks, kusjuures tema diagonaalielementideks on esialgse maatriksi diagonaalielementide pöördelemendid, s.t. kui

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siis } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.7 Lineaarne sõltumatus ja maatriksi astak

Maatriksit **A** nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui ei leidu ühtki vektorit **k** peale nullvektori **0**, mille korral **Ak** = **0**.

Maatriksi **astakuks** nimetatakse tema maksimaalset lineaarselt sõltumatute ridade või veergude arvu. Maatriksi **A** astakut tähistatakse r(**A**). Kui ruutmaatriksi astak võrdub tema ridade või veergude arvuga, siis öeldakse, et maatriks on **täisastakuga**.

Kui ruutmaatriks ei ole täisastakuga, siis tema determinant võrdub nulliga ja pöördmaatriksit ei eksisteeri.

Omadused

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.
2. Kui **A** on $p \times q$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \le \min(p, q)$.
3. Kui **A** ja **B** on $p \times q$-maatriksid, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B})$.
4. Kui **A** on $p \times q$-maatriks ja **B** $q \times r$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min\left(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\right)$.

Näide. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **E** astak $\mathrm{r}(\mathbf{E}) = 2$, sest kolmas rida avaldub kahe esimese rea summana ja seega ei saa lineaarselt sõltumatuid ridu olla rohkem kui kaks. Seega ka $|\mathbf{E}| = 0$ ja pöördmaatriksit $\mathbf{E}^{-1}$ ei leidu.

2.8 Üldistatud pöördmaatriks

Maatriksi **A** **üldistatud pöördmaatriksiks** nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}^{-}$, mis rahuldab võrdust $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Üldistatud pöördmaatriks **ei ole üheselt määratud** ja võib olla leitud mitmel erineval viisil. Lihtsaim viis maatriksi **A** üldistatud pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-}$ leidmiseks on

- võtta maatriksist **A** välja maksimaalne lineaarselt sõltumatu alammaatriks (miinor) **B**,
- leida selle pöördmaatriks $\mathbf{B}^{-1}$,
- asendada maatriksis **A** miinor **B** tema pöördmaatriksiga $\mathbf{B}^{-1}$ ning kõik ülejäänud elemendid nullidega.

Näide. Eelmises näites toodud maatriksi **E** maksimaalne lineaarselt sõltumatu miinor on $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Selle pöördmaatriks $\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ning maatriksi **E** üldistatud pöördmaatriks $\mathbf{E}^{-}$ esitub kujul

$$\mathbf{E}^{-} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.9 Jälg

Ruutmaatriksi **A** jäljeks tr(**A**), nimetatakse tema peadiagonaalil paiknevate elementide summat:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Omadused

1. tr(**ABC**) = tr(**BCA**) = tr(**CAB**).
2. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja a ja b on konstandid siis $\mathrm{tr}(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}) = a\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$.
3. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja leidub $\mathbf{B}^{-1}$, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAB}^{-1})$.
4. Kui **A** on idempotentne, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
5. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 71 & 43 & 9 \\ 9 & 23 & -14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3 + 43 + (-14) = 32$.

2.10 Omaväärtused ja omavektorid

Skalaari λ nimetatakse $n\times n$-maatriksi **A** **omaväärtuseks** (ladina juureks, karakteristlikuks juureks), kui leidub selline $n\times 1$ mittenulliline vektor **x**, mis rahuldab võrdust

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

ehk teisiti üleskirjutatuna

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Seega on λ maatriksi **A** omaväärtus siis ja ainult siis, kui $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ on singulaarne, mis tähendab et

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0.$$

Seda viimast võrrandit nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks**.

Maatriksi **A** kõigi omaväärtuste hulka $\lambda_i : i = 1,\ldots,n$ nimetatakse maatriksi **A** **spektriks**.

Maatriksi **A** omaväärtusele λ vastavat mittenullilist vektorit **x** nimetatakse maatriksi **A** **omavektoriks**. S.t., et mittenulliline vektor **x** on $n\times n$-maatriksi **A** omaväärtusele λ vastav omavektor siis ja ainult siis kui ta on homogeense lineaarvõrrandisüsteemi $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{z} = \mathbf{0}$ lahendiks (**z** suhtes).

Omadused

1. Maatriksid **A** ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on samade omaväärtustega.
2. Ruutmaatriksi **A** omaväärtuste summa võrdub tema jäljega ning korrutis determinandiga.
3. Sümmeetrilise maatriksi astak võrdub tema mittenulliliste omaväärtuste arvuga.
4. Kui λ on maatriksi **A** omaväärtus, siis λ^k on maatriksi $\mathbf{A}^k$ omaväärtus.
5. Olgu **B** $n\times n$-maatriks, **D** diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil paiknevad maatriksi **B** omaväärtused ning **L** $n\times n$-maatriks, mis koosneb maatriksi **B** omaväärtustele vastavatest omavektoritest. Kui **L** on mittesingulaarne, siis on maatriks **B** avaldatav kujul $\mathbf{B} = \mathbf{LDL}^{-1}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksile **A** vastav karakteristlik võrrand on

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0, \text{ s.t. } \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0.$$

Kirjutades viimase determinandi lahti saame, et $(1-\lambda)^2 - 36 = 0$, millest maatriksi **A** omaväärtused tulevad: $\lambda_1 = -5$ ja $\lambda_2 = 7$.

Leitud omaväärtustele vastavate omavektorite leidmine pole enam nii lihtne. Siinkohal võiks vaid märkida, et kuna

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

siis on vektorid $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ning $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ omaväärtustele –5 ning 7 vastavad omavektorid (rahuldavad võrdust $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$).

2.11 Üldine maatriksfunktsioonide leidmise algoritm

Olgu maatriks **A** ruutmaatriks. Mingi maatriksfunktsioon *f*(**A**) on kõige üldisemalt esitatav kujul

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_{11})\mathbf{Z}_{11} + f'(\lambda_{12})\mathbf{Z}_{12} + \ldots + f^{(n_1-1)}(\lambda_{1n_1})\mathbf{Z}_{1n_1} + \ldots + f(\lambda_{k1})\mathbf{Z}_{k1} + f'(\lambda_{k2})\mathbf{Z}_{k2} + \ldots + f^{(n_k-1)}(\lambda_{kn_k})\mathbf{Z}_{kn_k}$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_k} f^{(j-1)}(\lambda_{ij})\mathbf{Z}_{ij},$$

kus λ_{ij} on maatriksi **A** *i*. omaväärtus ja indeks *j* märgib selle kordsust, $f^{(j-1)}(\lambda_{ij})$ on funktsiooni *f* (*j*-1). tuletise väärtus kohal λ_{ij} ning $\mathbf{Z}_{ij}$ on üksnes maatriksist **A** (ja mitte funktsioonist *f*) sõltuv konstantne maatriks.

Maatriksi **A** omaväärtused leitakse võrrandist $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ ja konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_{ij}$ leidmiseks konstrueeritakse võimalikult lihtsatest maatriksi **A** funktsioonidest (a'la ühikteisendus *f*(**A**) = **I**, samasusteisendus *f*(**A**) = **A**, ruutteisendus *f*(**A**) = $\mathbf{A}^2$ jne) võrrandisüsteem ülaltoodud kujul. Seejuures tuleb astmefunktsioonide *f*(**A**) = $\mathbf{A}^r$ korral **0**-maatriksist erinev vaid esimene kordseile omaväärtustele $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in_i}$ vastavaist maatrikseist $\mathbf{Z}_{ij}$ ja seega $\mathbf{A}^r = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^r\mathbf{Z}_i$.

Näiteks maatriksfunktsiooni $\mathbf{P}^{1000}$ leidmiseks, kus $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & ½ \\ 0 & ½ \end{pmatrix}$, tuleb esmalt arvutada maatriksi **P** omaväärtused, lahendades järgmise võrrandi:

$$|\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & ½ \\ 0 & ½-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(½-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = ½.$$

Konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ leidmiseks tuleb konstrueerida vajalik võrrandisüsteem ja see lahendada:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{P}) = f_1(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_1(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \\ f_2(\mathbf{P}) = f_2(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_2(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{I} = 1\cdot\mathbf{Z}_1 + 1\cdot\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{P} = 1\cdot\mathbf{Z}_1 + ½\cdot\mathbf{Z}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ½\mathbf{Z}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{Z}_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Edasi saabki arvutada $\mathbf{P}^{1000}$:

$$\mathbf{P}^{1000} = \lambda_1^{1000}\mathbf{Z}_1 + \lambda_2^{1000}\mathbf{Z}_2 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{1000}}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 1/2^{1000} \\ 0 & 1/2^{1000} \end{pmatrix}.$$

Samad konstantsed maatriksid $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ on kasutatavad mistahes maatriksfunktsiooni leidmiseks, sest algoritmi kohaselt tuleb vastavat funktsiooni rakendada vaid omaväärtustele.

Näiteks funktsioon $\mathbf{P}^{-2}(\mathbf{P}^2 + \mathbf{P} + \mathbf{I})$ avaldub kujul

$$\mathbf{P}^{-2}(\mathbf{P}^2 + \mathbf{P} + \mathbf{I}) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}{\lambda_1^2}\mathbf{Z}_1 + \frac{\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1}{\lambda_2^2}\mathbf{Z}_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.12 Ruutvormid, positiivne ja negatiivne määratus

Olgu $\mathbf{a}$ $n\times 1$-vektor ja $\mathbf{A}$ $n\times n$-maatriks. Avaldist $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nimetatakse **lineaarvormiks** ja avaldist $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ **ruutvormiks** vektori $\mathbf{x}$ suhtes.

Seejuures võime alati eeldada, et maatriks $\mathbf{A}$ on sümmeetriline, sest kui ta seda pole, võime asendada $\mathbf{A}$ sümmeetrilise maatriksiga $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2$ ning saada esialgsega võrdse ruutvormi:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\mathbf{x}\,.$$

Olgu nüüd maatriks $\mathbf{A}$ sümmeetriline. Öeldakse, et maatriks $\mathbf{A}$ on

- **positiivselt määratud** (**negatiivselt määratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$) iga $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ korral;
- **positiivselt poolmääratud** (**negatiivselt poolmääratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$) iga $\mathbf{x}$ korral.

Omadused

1. Kui $\mathbf{A}$ on positiivselt määratud, siis on seda ka $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Maatriks $\mathbf{A}$ on positiivselt määratud, kui kõik tema omaväärtused on positiivsed ($\lambda_i > 0$).
3. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ja $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ on positiivselt poolmääratud, $\mathbf{B}$ – $m\times n$-maatriks.

2.13 Maatrikstuletis

Maatrikseid sisaldavate matemaatiliste avaldiste diferentseerimine järgib sarnaseid skalaare sisaldavate avaldiste diferentseerimise reegleid.

Olgu $c = 3x_1 + 5x_2 + 9x_3$. Tähistades $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, võib kirjutada $c = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Et $\dfrac{\partial c}{\partial x_1} = 3$, $\dfrac{\partial c}{\partial x_2} = 5$ ja $\dfrac{\partial c}{\partial x_3} = 9$, siis $\dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Üldine reegel on: $\dfrac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Olgu nüüd $c = 9x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Et $\dfrac{\partial c}{\partial x_1} = 2(9x_1) + 6x_2$ ja $\dfrac{\partial c}{\partial x_2} = 6x_1 + 2(4x_2)$, siis $\dfrac{\partial c}{\partial x} = 2\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Üldiselt, kui maatriks $\mathbf{A}$ on sümmeetriline, siis $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$, vastasel juhul ($\mathbf{A}$ ei ole sümmeetriline) $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

3 MAATRIKSOPERATSIOONID *MS EXCEL*'IS

MS Excel'is on olemas standardsed maaatrikstehted nagu maatrikiste liitmine ja lahutamine, skalaariga korrutamine, maatriksite korrutamine (funktsioon MMULT), transponeerimine (TRANSPOSE), pöördmaatriksi leidmine (MINVERSE) ja determinandi arvutamine (MDETERM).

Enne tehete teostamist tuleb vajalikud maatriksid sisestada *Excel*'i töölehele.

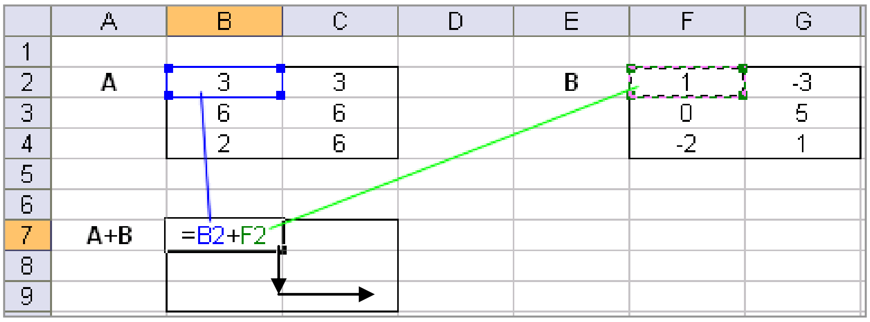
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	**A**	3	3		**B**	1	-3		*k*	10
3		6	6			0	5			
4		2	6			-2	1			

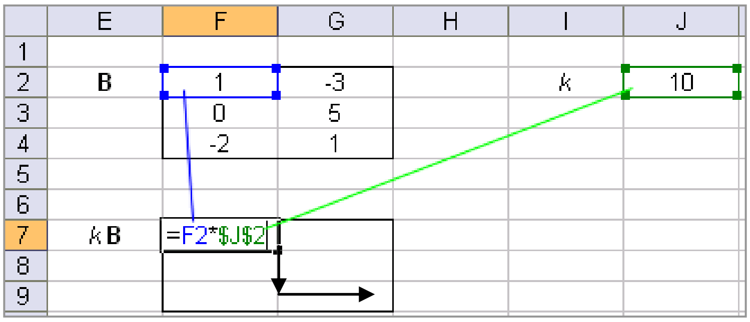
3.1 Maatriksite liitmine, lahutamine ja skalaariga korrutamine

Maatriksite liitmiseks, lahutamiseks ja skalaariga korrutamiseks on *Excel*'is vähemalt 3 võimalust.

1) Esiteks võib tehted teostada elementide kaupa, summeerides, lahutades või korrutades maatriksite esimesed lahtrid ning kopeerides sisestatud valemi teistesse lahtritesse.

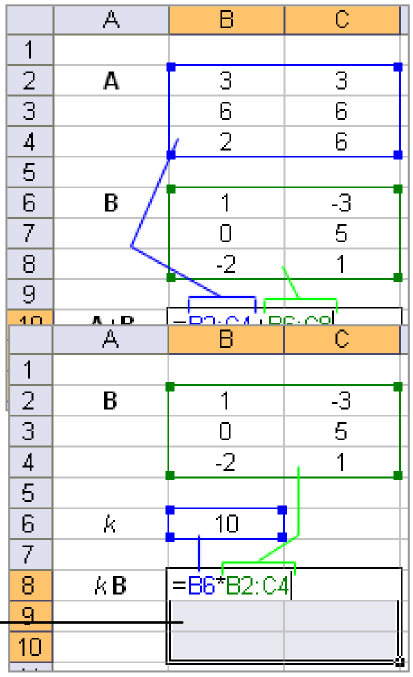
Tähele tuleb panna vaid, et skalaariga korrutamisel peab skalaari sisaldava lahtri aadress olema fikseeritud.

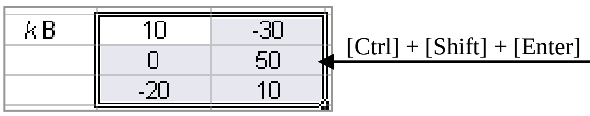




2) Teiseks võib kirjeldatud liitmis-, lahutamis- ja korrutamistehet rakendada tervele maatriksile korraga, saades ka tulemuseks korraga terve maatriksi (nö massiivi). Selline lähenemine osutub eelkõige vajalikuks pikemate maatrikstehete korraga ühe valemina teostamisel (vt 1.3.3).

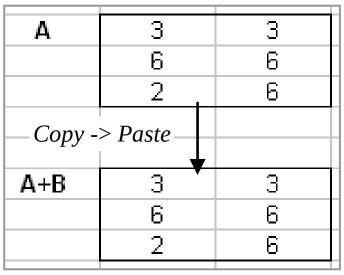
- Kõigepealt tuleb *Excel*'i töölehel selekteerida tulemusmaatriksi suuruse jagu lahtreid,
- seejärel sisestada esimesse lahtrisse soovitud tehe, ja seda mitte tehtena üksiklahtrite vaid tervete maatriksite vahel;
- viimase etapina tuleb sisestatud tehet rakendada kõigile selekteeritud lahtritele vajutades esmalt alla klahvid **[Ctrl]** ja **[Shift]** ning seejärel, nimetatud klahve all hoides, **[Enter]**.



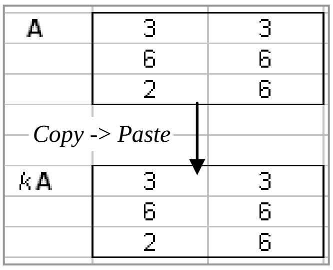


3) Alternatiivina kirjeldatud valemitele võib maatriksite liitmisel, lahutamisel ja skalaariga korrutamisel kasutada käsku <Kleebi teisiti / Paste special>. Sellel juhul tuleb

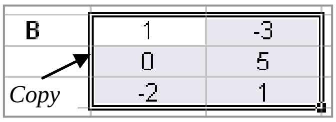
- tehte tulemuse oodatavasse asukohta kopeerida üks liidetavatest (liitmisel), vähendatav (lahutamisel) või skalaariga korrutatav maatriks,



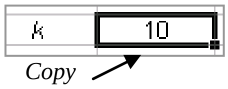
või



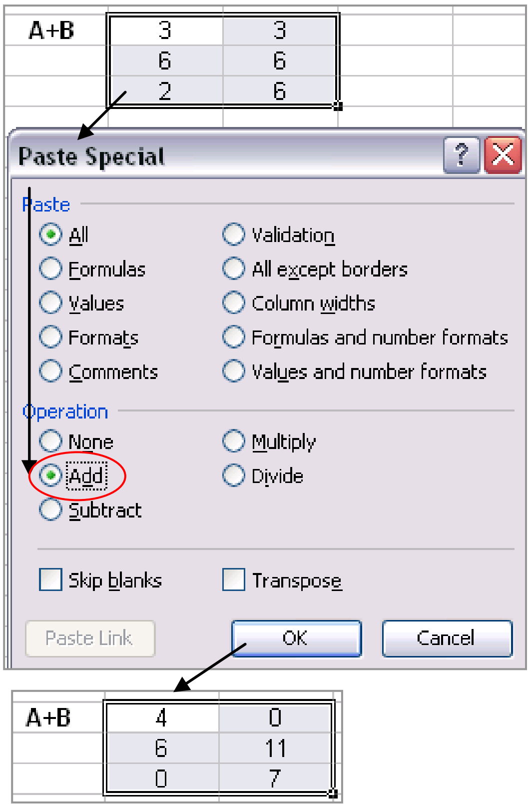
- seejärel teha koopia <Kopeeri / Copy> teisest liidetavast, vähendajast või skalaarist,



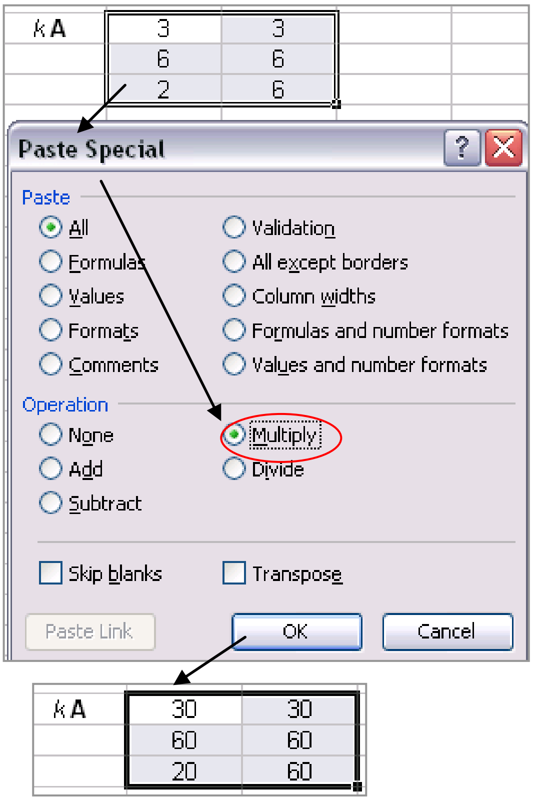
või



- võtta kleepimise asukohana blokki kogu tehte tulemuse asukohta kopeeritud maatriks ning
- rakendada käsku <Kleebi teisiti / Paste special> märkides alajaotuses <Operation> ära vastavalt valiku *Add*, *Subtract* või *Multiply*.



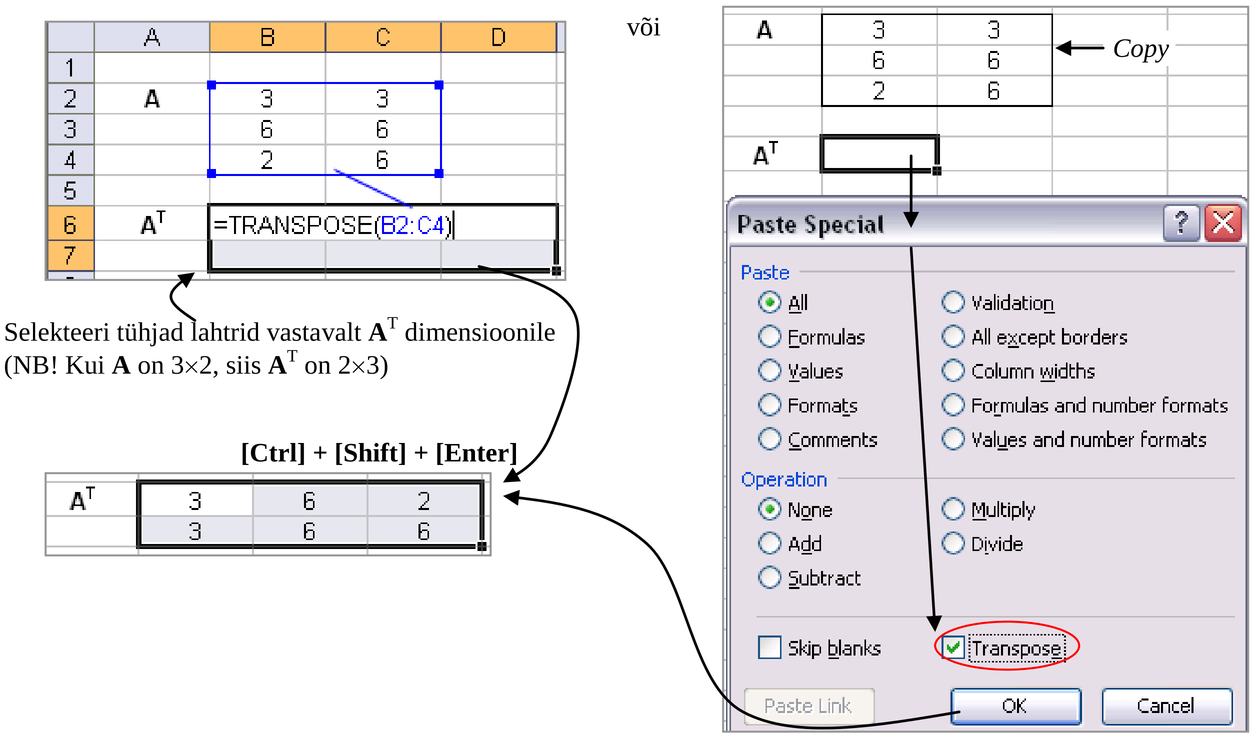
või



3.2 Maatriksite transponeerimine

Maatriksite transponeerimiseks saab kasutada kas

- funktsiooni TRANSPOSE või
- käsu <Kleebi teisiti / Paste special> lisavalikut *Transpose*.

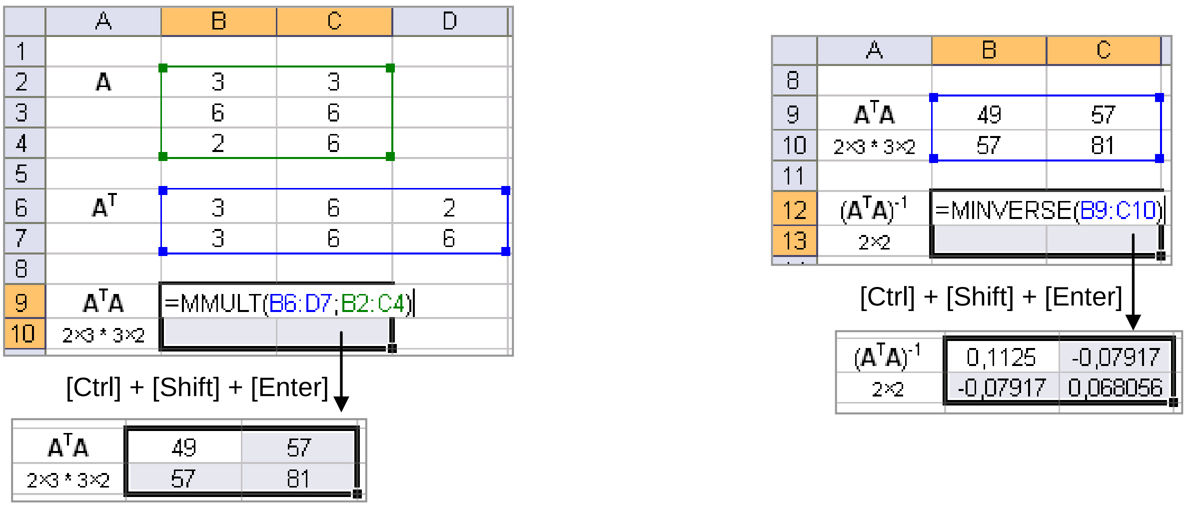


3.3 Maatriksite korrutamine ja pöördmaatriksi leidmine

Maatriksite korrutamine ja **pöördmaatriksi leidmine** on *Excel*'is teostavad vastavalt massiivi-funktsioonide MMULT ja MINVERSE abil.

Mõlema korral tuleb

- esmalt võtta blokki tulemusmaatriksi suurune tühi tabel *Excel*'i ruudustikus,
- seejärel sisestada vastav valem (või valida funktsioon *Excel*'i funktsioonide hulgast f_x) ning
- rakendamaks funktsiooni kõigile selekteeritud lahtritele vajutada esmalt alla klahvid [Ctrl] ja [Shift] ning seejärel, nimetatud klahve all hoides, [Enter] (või OK).



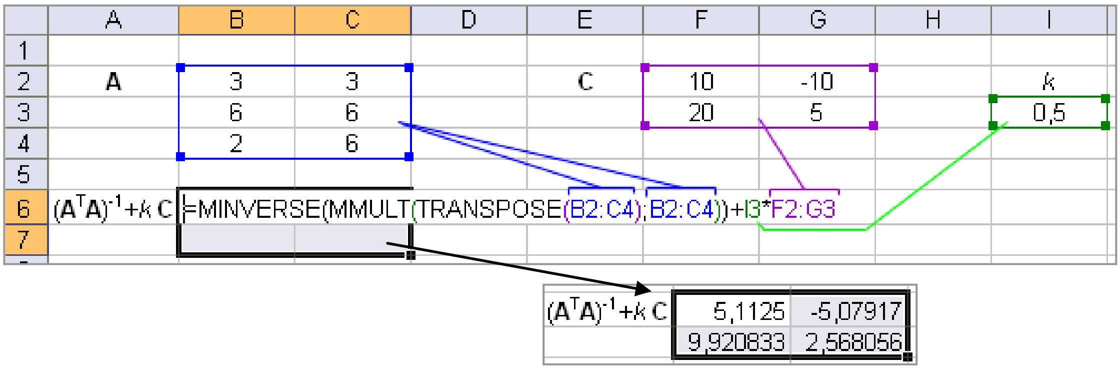
NB! Enne maatriksite korrutamist või pöördmaatriksi leidmist tasub veenduda tehte teostatavuses, st selles, et korrutatavate maatriksite dimensioonid ikka klapivad või et pööratav maatriks ikka ruut-maatriks on.

3.4 Tehetejärjekorrad

Kombineerides omavahel erinevaid *Excel*'i maatriksfunktsioone ja -tehteid, on ühe ainsa valemiga teostavad ka keerukamad, mitmeid maatrikstehteid sisaldavad, arvutused.
Enne tehetejärjekorra sisestamist on oluline tulemusmaatriksi dimensiooni korrektne leidmine ning vastava hulga lahtrite selekteerimine. Samuti tuleb tähele panna teostatavate tehete järjekorda, st et ühe maatriksfunktsiooni argumendiks võib olla teise maatriksfunktsiooni abil arvutatud maatriks.

Näiteks maatrikstehte $\mathbf{H} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}+k\mathbf{C}$, kus $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{matrix} 10 & -10 \\ 20 & 5 \end{matrix}$ ja $k = 0{,}5$, korral on tulemusmaatriksi **H** dimensioon 2×2. Pöördmaatriksi leidmise funktsiooni MINVERSE tuleb rakendada maatrikskorrutisele (funktsiooni MMULT tulemusele), viimase argumentidest esimene on omakorda transponeerimise (funktsiooni TRANSPOSE) tulemus. Vastava tehte *Excel*'s teostamiseks tuleb

- sisestada töölehele vajalikud maatriksid,
- selekteerida tulemusmaatriksi **H** tarvis 2×2 lahtrit,
- sisestada selekteeritud lahtriblokki vajalik tehetejärjekord kasutades *Excel*'i maatriksfunktsioone ja tehtemärke (esmalt viimasena teostatav tehe, selle argumentidena teised tehted, nende argumentidena vajadusel veel teised tehted jne – vt alljärgnevat joonist) ning
- [Ctrl] + [Shift] + [Enter].



4 ENESEKONTROLL

4.1 Test

1. Mitu nullist erinevat elementi on 3x3 ühikmaatriksis?
   Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 3; d) 9.
2. Milline on korrutismaatriksi $k\mathbf{A}$ dimensioon, kui k = 2 ja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?
   Vastuse variandid: a) 1x1; b) 2x2; c) 4x2; d) 2x4.
3. Milline on korrutismaatriksi $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ dimensioon, kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?
   Vastuse variandid: a) 1x1; b) 2x2; c) 4x2; d) 2x4.
4. Milline on otsekorrutise $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ dimensioon, kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?
   Vastuse variandid: a) 2x4; b) 4x4; c) 4x8; d) 4x16.
5. Millega võrdub $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$?
   Vastuse variandid: a) $\mathbf{A}$; b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$; c) $\mathbf{A}^{-1}$; d) 1.
6. Millega võrdub $|\,\mathbf{I}_{3x3}\,|$ (determinant 3. järku ühikmaatriksist)?
   Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 3; d) 9.
7. Millega võrdub $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks?
   Vastuse variandid: a) $\mathbf{I}$; b) $\mathbf{I}^{-1}$; c) $\mathbf{0}$.
8. Millega võrdub $\mathbf{IA}^{-1}$, $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks?
   Vastuse variandid: a) $\mathbf{I}$; b) $\mathbf{A}$; c) $\mathbf{A}^{-1}$.
9. Millega võrdub $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$?
   Vastuse variandid: a) $(\mathbf{BA})^{\mathrm{T}}$; b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$; c) $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
10. Millega võrdub $(\mathbf{AB})^{-1}$?
    Vastuse variandid: a) $(\mathbf{BA})^{-1}$; b) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$; c) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
11. Millise maatrikstehtega on avaldatav tundmatute parameetrite vektor $\mathbf{x}$ maatriksvõrdusest $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$?
    Vastuse variandid: a) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$; b) $\mathbf{x} = \mathbf{cA}^{-1}$; c) $\mathbf{x} = \mathbf{cA}^{\mathrm{T}}$.
12. Millega võrdub $\mathrm{tr}(\mathbf{I}_{nxn})$?
    Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 10; d) n.

4.2 Ülesanded

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Näidake, et $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 & 20 \\ 8 & -2 & 22 & 18 \end{pmatrix} = \mathbf{AB} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$.
2. Näidake, et $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline.
3. Näidake, et suvalise $p \times q$-maatriksi $\mathbf{H}$ korral korrutismaatriksid $\mathbf{HH}^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ on sümmeetrilised.
4. Kontrollige, kas $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, kui $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Näidake, et $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$.

6. Näidake, et 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

7. Kas leidub pöördmaatriks $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$, kui $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

8. Järgnevas tabelis on toodud 5 pulli tütarde 1. laktatsiooni keskmiste näitajate erinevused populatsiooni keskmisest.

	Piim, kg	Välimiku üldhinne	Seemen-duste arv	Surnult sündide arv
Pull1	+2117	+1,5	+1,7	+0,21
Pull2	-985	+0,0	+0,7	-0,13
Pull3	+1421	+0,4	+0,2	+0,04
Pull4	-97	-1,2	-2,1	+0,05
Pull5	+1875	+0,2	-0,6	-0,07

Pulli järglaste paremus või halvemus võrreldes populatsiooni keskmisega väljendab pulli poolt järglastele pärandatavate geenide mõju.

See, kui palju ühe ühikuline erinevus mingi tunnuse osas rahaliselt väärt on, et kirjas järgnevas tabelis.

Piim, 1 kg	Välimiku hinne	Seemendus	Surnult sünd
3.- EEK	150.- EEK	-250.- EEK	-1500.- EEK

Millise maatrikstehtega saab kahe toodud tabeli (maatriksi) alusel leida korraga iga pulli poolt järglastele pärandatavate geenide (so sisuliselt spermadoosi) rahalist väärtust?

Leidke vastav väärtus iga pulli tarvis ja järjestage pullid.

9. Leidke üldist maatriksfunktsioonide algoritmi kasutades, millega võrdub $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$, kus maatriks $\mathbf{M}$ on kujul $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Teostage eelmises ülesandes toodud tehe ühe tehetejärjekorrana *MS Excel*'is.

4.3 Testi vastused

1. c) 3
2. b) 2x2
3. c) 4x2
4. c) 4x8
5. a) **A**
6. b) 1
7. a) **I**
8. c) $\mathbf{A}^{-1}$
9. c) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
10. c) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
11. a) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$
12. d) *n*

4.4 Ülesannete lahendused

1. Standardsed maatrikstehted. Vastus on antud ülesande tekstis.

2. Tegelikult on see, et tulemusmaatriks on sümmeetriline, näha juba liidetavatest: mõlemad liidetavad on sümmeetrilised maatriksid ...

3. Kui maatriks **H** on $p\times q$-maatriks, siis tema transponeeritud maatriks $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ on $q\times p$-maatriks, kusjuures $h_{ij} = h'_{ji}$, kus h_{ij} on maatriksi **H** *i*. reas ja *j*. veerus paiknev element ning h'_{ji} on maatriksi $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *j*. reas ja *i*. veerus paiknev element.

   Korrutismaatriksi $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *i*. reas ja *j*. veerus paiknev element x_{ij} avaldub kujul
   $$x_{ij} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h'_{kj} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h_{jk}$$
   ning *j*. reas ja *i*. veerus paiknev element x_{ji} kujul
   $$x_{ji} = \sum_{k=1}^{q} h_{jk} h'_{ki} = \sum_{k=1}^{q} h_{jk} h_{ik}\ .$$
   Seega $x_{ij} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h_{jk} = x_{ji}$, iga *i* ja *j* korral. Et viimane tulemus on sümmeetrilise maatriksi tunnus, peabki korrutismaatriks $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ olema sümmeetriline.

   Analoogselt on näidatav ka korrutismaatriksi $\mathbf{Y} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ sümmeetrilisus.

4. Tavaline maatriksite korrutamine, tingimus tulemuse õigsuse kontrollimiseks on kirjas ülesande tekstis ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$).

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$
   $$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot[2\cdot(-5)-(-5)\cdot(-2)] + 5\cdot(-1)^{1+2}\cdot[3\cdot(-5)-(-5)\cdot 6] - 5\cdot(-1)^{1+3}\cdot[3\cdot(-2)-2\cdot 6]$$
   $$= 1\cdot(-20) - 5\cdot 15 - 5\cdot(-18) = -20 - 75 + 90 = -5;$$
   $$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$
   $$= -3\cdot(-1)^{1+1}\cdot[5\cdot(-4)-(-7)\cdot 3] + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot[(-3)\cdot(-4)-(-7)\cdot(-2)] - 6\cdot(-1)^{1+3}\cdot[(-3)\cdot 3 - 5\cdot(-2)]$$
   $$= -3\cdot 1 - 2\cdot(-2) - 6\cdot 1 = -3 + 4 - 6 = -5.$$

6. 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

   Seega
   $$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
   $$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \times \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \overbrace{-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}}^{0} \\ \underbrace{a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}}_{0} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

7. Ei leidu, sest maatriksi **X** veerud on lineaarselt sõltuvad (esimene veerg avaldub teise, kolmanda ja neljanda veeru summana).
   Muidugi võib teostada ka maatrikstehte $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ ja leida tulemuseks saadud maatriksi determinandi. Viimase 0-ga võrdumisest järeldubki pöördmaatriksi mitteleidumine.

8. Moodustame tabelis toodud pullide tütarde keskmiste näitajate ja populatsiooni keskmiste näitajate vahelistest erinevustest maatriksi **P** (igale pullile vastab maatriksis üks rida ja igale näitajale üks veerg) ning näitajate rahalistest väärtustest veeruvektori **x**:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2117 & 1{,}5 & 1{,}7 & 0{,}21\\ -985 & 0{,}0 & 0{,}7 & -0{,}13\\ 1421 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}04\\ -97 & -1{,}2 & -2{,}1 & 0{,}05\\ 1875 & 0{,}2 & -0{,}6 & -0{,}07\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}3\\150\\-250\\-1500\end{pmatrix}.$$

Pullide poolt järglastele pärandatavate geenide rahalised väärtused on siis esitatavad maatrikskorrutise **Px** tulemuseks oleva vektori kujul:

$$\mathbf{s}=\mathbf{Px}=\begin{pmatrix}2117 & 1{,}5 & 1{,}7 & 0{,}21\\ -985 & 0{,}0 & 0{,}7 & -0{,}13\\ 1421 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}04\\ -97 & -1{,}2 & -2{,}1 & 0{,}05\\ 1875 & 0{,}2 & -0{,}6 & -0{,}07\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\150\\-250\\-1500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5836\\-2935\\4213\\-21\\5910\end{pmatrix}.$$

Seega on pullide järjestus järgmine: Pull5, Pull1, Pull3, Pull4, Pull2. Seejuures pärandavad pullid 5, 1 ja 3 järglastele geneetilise potentsiaali tuua omanikele populatsiooni keskisega võrreldes enam kasu ning pullid 2 ja 4 pärandavad järglastele geneetilise potentsiaali tuua omanikele populatsiooni keskisega võrreldes vähem kasu.

9. Leiame esmalt maatriksi $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ omaväärtused, lahendades järgmise võrrandi:

$$|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow\ -(2-\lambda)(1+\lambda)=0 \ \Rightarrow\ \lambda^2-\lambda-2=0 \ \Rightarrow\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1.$$

Konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ leidmiseks tuleb konstrueerida vajalik võrrandisüsteem ja see lahendada:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{P})=f_1(\lambda_1)\mathbf{Z}_1+f_1(\lambda_2)\mathbf{Z}_2\\ f_2(\mathbf{P})=f_2(\lambda_1)\mathbf{Z}_1+f_2(\lambda_2)\mathbf{Z}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{I}=1\cdot\mathbf{Z}_1+1\cdot\mathbf{Z}_2\\ \mathbf{M}=2\cdot\mathbf{Z}_1-1\cdot\mathbf{Z}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\mathbf{Z}_1=\mathbf{I}-\mathbf{Z}_2\\ 3\mathbf{Z}_2=2\mathbf{I}-\mathbf{M}\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Z}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\tfrac{1}{3} & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{Z}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tfrac{1}{3} & 0\end{pmatrix}.$$

Edasi saabki arvutada $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})=\lambda_1\ \frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\ \mathbf{Z}_1+\lambda_2\ \frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2}\ \mathbf{Z}_2=\frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tfrac{1}{3} & 0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\tfrac{1}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\tfrac{1}{2} & 0\\ 1\tfrac{1}{2} & -2\end{pmatrix}.$$

10. Paiknegu maatriks **M** *Excel*'i töölehel lahtrites B2:C3. Tehte $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$ tulemusmaatriks on siis leitav tehetejärjekorraga

=MMULT(B2:C3;(MMULT(MINVERSE(B2:C3);MINVERSE(B2:C3))
+MMULT(MINVERSE(B2:C3);B2:C3)))