Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Anu Iher

Olulisemad kahe üldkogumi võrdlemise testid ja *MS Excel*'i moodul nende läbiviimiseks

Bakalaureusetöö

Juhendajad: Tanel Kaart,
Anne Selart

Tartu 2005

Sisukord

Sissejuhatus

Matemaatilise statistika põhiülesandeks on kogutud andmete põhjal üldiste järelduste tegemine. Viimase all mõistetakse sageli otsuseid kahe teatud eeltingimuste poolest erinevate gruppide sarnasuse või erinevuse kohta. Nende erinevuste testimiseks võrreldakse enamasti gruppide keskmisi tasemeid, harvem ka varieeruvust või üldisemalt – jaotusi.

Käesoleva töö eesmärgiks oli koostada tabelarvutussüsteemi *MS Excel*'i menüüribale lisatav rakendusmoodul kahe üldkogumi võrdlemiseks nii parameetriliste kui ka mitteparameetriliste meetodite abil. Eestikeelne ja selgitavate märkustega rakendusmoodul on hõlpsasti kasutatav ka mittestatistikule ega nõua spetsiaalse statistikatarkvara kasutusoskust ja olemasolu.

Töö esimeses osas antakse ülevaade kahe üldkogumi keskmiste tasemete ja jaotuste võrdlemise testidest. Kõigi kirjeldatud testide juures esitatakse testi rakendamiseks vajalikud eeldused, hüpoteeside paarid, teststatistikud ja otsuse langetamise eeskirjad.

Teises osas esitatakse ülevaade rakendusmooduli koostamisest. Mooduli abil lahendatakse näiteülesanded ja esitatakse ekraanipildid rakenduse kasutamise paremaks kirjeldamiseks.

1 Kahe üldkogumi võrdlus

Käesoleva peatüki alajaotustes antakse ülevaade kahe üldkogumi keskmiste tasemete ja jaotuste võrdlemise testidest.

Kirjeldatakse peamisi mitteparameetrilisi st üldkogumite jaotustest mittesõltuvaid teste sõltumatute ja sõltuvate valimite korral. Lisaks vaadeldakse ka suure võimsusega ja praktikas sageli kasutamist leidvat parameetrilist t-testi.

Käsitletavad testid on valdavalt üldkogumite keskmiste tasemete võrdlemiseks. Jaotuste võrdlemise testidest vaadeldakse Kolmogorov-Smirnovi testi.

Testide kirjeldused, samuti statistikute tähistused, on õpikust Parring jt (1997). Testide eeldused on koostatud raamatu Conover (1971) abil. Asümptootiliste statistikute kasutamiseks vajalikud minimaalsed valimite mahud ei ühti erinevatel autoritel, käesolevas töös on eelistatud eelmainitud õpiku Parring jt (1997) esitatud tingimusi.

1.1 Mõisted ja tähistused

Üldkogum ja valim

Üldkogum on objektide kogum, mille kohta soovitakse järeldusi või otsustusi teha. Valim on juhusliku valiku või ka kindlatele kriteeriumitele vastava eeskirja järgi moodustatud osahulk üldkogumi objektidest, mida reaalselt mõõdetakse ja mille alusel soovitakse teha otsuseid üldkogumi kohta.

Küllalt suure tõenäosusega üldkogumi kohta õigeid järeldusi teha võimaldavat valimit nimetatakse esindavaks. Üldiselt moodustatakse esindav valim juhuslikult valitud üldkogumi objektidest, kusjuures igal üldkogumi objektil peab olema võrdne võimalus valimisse sattuda (Tiit jt, 1977).

Valimi põhilised arvkarakteristikud

Valimi keskväärtus on valimi elementide aritmeetiline keskmine

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1}$$

kus X_i on teoreetilise valimi $\mathbf{X}$ mahuga n element.

Valimi keskväärtus on üldkogumi keskväärtuse μ nihketa hinnanguks (Tiit jt, 1977, lk 269).

Valimi statistik

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

on nihkega hinnanguks üldkogumi dispersioonile (Tiit jt, 1977, lk 270).
Seetõttu kasutatakse valimi dispersioonina statistikut

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2. \tag{2}$$

Valimi hajuvuse kirjeldamisel kasutatakse standardhälvet

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \tag{3}$$

Valimi standardveaks nimetatakse valimi keskväärtuse standardhälvet

$$\sqrt{D\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Sõltumatud ja sõltuvad valimid

Valimid on sõltumatud, kui nad sisaldavaid erinevaid objekte. Kui mõlemas valimis kasutatakse samu objekte või sarnaseid objektide paare ja tehakse mõõtmised erinevates tingimustes, on valimid sõltuvad (Parring jt, 1997, lk 121).

Teststatistik

Üldkogumi teoreetiliseks valimiks on n-komponendiline juhuslik vektor $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

mille komponentideks on sõltumatud ja ühesuguse jaotusega P_X juhuslikud suurused (Tiit jt, 1977, lk 254).

Üldkogumist moodustatud konkreetset valimit tähistatakse

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kus n on valimi maht.

Teoreetilise valimi $\mathbf{X}$ iga mõõtuvat funktsiooni $T(\mathbf{X})$ nimetatakse statistikuks (Tiit jt, 1977, lk 254).

Kahe üldkogumi võrdlemisel nimetatakse teststatistikuks seega igat mõõtuvat funktsiooni

$$T = T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}),$$

kus $\mathbf{X_1}$ ja $\mathbf{X_2}$ on vaadeldavate üldkogumite teoreetilised valimid.
Konkreetsete valimite $\mathbf{x_1}$ ja $\mathbf{x_2}$ korral arvutatud teststatistiku väärtust tähistatakse kujul

$$t = T(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}).$$

Statistilised hüpoteesid

Üldkogumi kohta esitatud väidet nimetatakse statistiliseks hüpoteesiks. Hüpoteesi, mis määrab üldkogumile võimalikult lihtsa struktuuri, nimetatakse nullhüpoteesiks ja tähistatakse H_0. Nullhüpoteesi vastandväidet, millena sõnastatakse tõestada soovitav väide, nimetatakse sisukaks hüpoteesiks ja tähistatakse H_1 (Parring jt, 1997, lk 96).

Sõltuvalt hüpoteeside sisust, määratakse teststatistik $T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$ ja tema jaotus nullhüpoteesi H_0 kehtides. Kui valimi põhjal arvutatud teststatistiku väärtuse $t(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$ esinemine on nullhüpoteesi eeldusel määratud teststatistiku jaotuse korral vähetõenäoline, võetakse vastu sisukas hüpotees, vastasel korral jäädakse nullhüpoteesi juurde.

I liiki veaks nimetatakse valimi alusel sisuka, kuid üldkogumis mittekehtiva, hüpoteesi vastuvõtmist. II liiki veaks nimetatakse üldkogumis tegelikult mittekehtiva nullhüpoteesi juurde jäämist. Ühe vea tekkimise tõenäosuse vähendamisel suureneb teine viga. I liiki vead on praktikas reeglina raskemate tagajärgedega, seega peetakse hüpoteeside kontrollimisel olulisemaks I liiki vea tõkestamist.

Hüpoteesid võivad olla ühe- või kahepoolsed. Hüpoteesi, mis lubab üldkogumite võrreldavate suuruste omavahelisi mõlemasuunalisi erinevusi, nimetatakse kahepoolseks. Ühepoolseks hüpoteesiks nimetatakse hüpoteesi, kus võrreldavad suurused erinevad üksteisest kindlas suunas.

Olulisuse tõenäosus ja - nivoo

I liiki vea ülempiiri nimetatakse olulisuse nivooks ja tähistatakse sümboliga α. Testi olulise nivoo määratakse konkreetse ülesande sisust ning I ja II liiki vigade tagajärgedest lähtuvalt. Sagedamini kasutatakse olulisuse nivoo väärtusi 0,1, 0,05 või 0,01. Tõenäosust vastu võtta sisukas hüpotees, kui see ka üldkogumis tegelikult kehtib, nimetatakse testi võimsuseks.

Antud valimi korral teststatistiku abil arvutatud vähimat olulisuse nivood, mille korral saab vastu võtta sisuka hüpoteesi, nimetatakse olulisuse tõenäosuseks p. Reeglina väljastavadki statistikaprogrammid olulisuse tõenäosuse.

Statistiliste hüpoteeside korral langetatakse otsus:

- kui $p \leq \alpha$, võetakse vastu sisukas hüpotees H_1;

- kui $p > \alpha$, jäädakse nullhüpoteesi H_0 juurde.

Parameetrilised ja mitteparameetrilised testid

Statistiliste hüpoteeside kontrollimiseks konstrueeritud testi nimetatakse parameetriliseks, kui üldkogumi ja teststatistiku jaotused järgivad tuntud tõenäosusjaotusi ning kui hüpoteesid on püstitatavad nende tõenäosusjaotuste parameetrite kohta.

Testi nimetatakse mitteparameetriliseks, kui ei tehta eeldusi üldkogumi jaotuse kohta ega tegeleta hüpoteeside kontrollimisel spetsiifiliste üldkogumite parameetrite (keskväärtus, standardhälve, jne) võrdlemisega.

Et mitteparameetrilised testid nõuavad andmete kohta vähem eeldusi ja kasutavad seeläbi ka vähem andmetes peituvat informatsiooni, on nende võimsus võrreldes parameetriliste testidega väiksem. Samas on eelduste mittetäidetuse korral parameetriliste testidega oht saada valed tulemused ja vastu võtta valed otsused.

Traditsiooniliselt kasutatakse parameetrilisi teste, kui uuritav tunnus on normaaljaotusega või on tunnus arvuline ja suure valimiga. Mitteparameetrilisi teste kasutatakse mittearvulise tunnusega või kui uuritav on küll arvuline, ent ei jaotu vastavalt normaaljaotuse seaduspäradele ja valim on väike.

1.2 Keskmiste võrdlemine sõltumatute valimite korral

Keskmiste võrdlemise teste sõltumatute valimite korral võib kasutada nt järgmiste hüpoteeside testimiseks:

- Kas kaks üldkogumit on erinevad?
- Kas ühe üldkogumi objektide väärtused kalduvad olema suuremad teise üldkogumi objektide väärtustest?

Mõlema üldkogumi valimid peavad olema sõltumatud. Valimite objektid peavad olema juhuslikult üldkogumist valitud, samuti ei tohi üldkogumite objektid olla valitavad mõlemasse valimisse.

Üldkogumitest ebaõigesti moodustatud valimite korral võib kergesti jõuda valele järeldusele.

1.2.1 t-test võrdse varieeruvusega valimite korral

Suurte valimite (mahud kokku vähemalt 60 vaatlust) keskväärtuste vahe jaotus läheneb valimimahtude kasvades normaaljaotusele sõltumata üldkogumite jaotustest. Väikeste valimite korral jääb keskväärtuste vahe sõltuma üldkogumite jaotustest.

Kui mõlemad vaadeldavad üldkogumid on normaaljaotusega, siis on valimite keskväärtuste vahede jaotus hõlpsasti leitav ja keskväärtuste erinevust saab kontrollida t-testi abil.

Eeldused

Kahe üldkogumi keskväärtuste võrdlemiseks võib rakendada t-testi, kui

- üldkogumid on sõltumatud;
- üldkogumid on normaaljaotusega;
- üldkogumite standardhälbed on lähedased.

Teststatistik

Valimite keskväärtuste vahe jaotus läheneb valimimahtude kasvamisel normaaljaotusele:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \overset{n\to\infty}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_*),$$

kus $\bar{X}_1$ ja $\bar{X}_2$ on teoreetiliste valimite keskväärtused ja μ_1 ja μ_2 on üldkogumite keskväärtused ja σ_* on üldkogumite keskväärtuste vahe standardhälve

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Kasutades üldkogumite keskväärtuste vahe standardhälbe σ_* asemel tema hinnangut S_*, on suurte valimimahtude ($n_1 + n_2 > 60$) korral Z-statistiku jaotuseks nullhüpoteesi kehtides standardiseeritud normaaljaotus:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_*} \overset{H_0}{\sim} N(0,1),$$

kus S_* on keskväärtuste vahe standardhälbe hinnang.

Väikeste valimimahtude korral on kirjeldatud statistiku jaotus normaaljaotusele lähedase Studenti t-jaotusega.

Seega kasutatakse normaaljaotusega üldkogumite keskväärtuste erinevuste kontrollimisel statistikuna T valimite keskväärtuste standardiseeritud vahet, mis on nullhüpoteesi kehtides t-jaotusega vabadusastmete arvuga $n_1 + n_2 - 2$:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{u*}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}, \tag{4}$$

kus S_{u*} on teoreetiliste valimite keskväärtuste vahede standardhälbe hinnang ja avaldub üldkogumite dispersioonide võrdsuse eeldusel valemiga

$$S_{u*} = \sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}} = S\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

kus S on standardhälbe väärtus mõlemas teoreetilises valimis.

Kuna täpne, eeldatavalt mõlemas valimis sama, standardhälve ei ole teada, leitakse mõlema valimi standardhälbeid ja valimimahtude osakaale arvestav ühise standardhälbe hinnang S valemiga

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

kus S_1 ja S_2 on teoreetiliste valimite standardhälbed.

Statistilise otsuse langetamiseks arvutatakse teststatistiku väärtus ülaltoodud valemite abil, kasutades konkreetsete valimite arvkarakteristikuid:

$$t = T(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} \cdot \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}, \tag{5}$$

kus $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ on valimite keskväärtused ja s_1, s_2 on valimite standardhälbed.

Kahepoolne hüpotees

Keskväärtuste võrdlemisel esitatakse kontrollimiseks harilikult järgmine hüpoteeside paar:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on erinevad.}$$

t-jaotus on sümmeetriline jaotus. Nullhüpoteesi kehtides peaks valimite põhjal arvutatud statistiku t väärtus olema nullilähedane. Kui aga arvutatud t on vähetõenäoline väärtus t-jaotuses, siis võetakse vastu sisukas hüpotees ehk tingimusena väljendatuna

$$p_2 = P\left(|T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| \geq |t| \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus $T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$ on teoreetiline statistik ja t on konkreetsete valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Ühepoolsed hüpoteesid

Kui võib eeldada, et esimese üldkogumi väärtused on teise väärustest suuremad, saab olulise erinevuse kontrollimiseks esitada ühepoolse hüpoteeside paari:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 > \mu_2, \text{ esimese üldkogumi keskväärtus on suurem.}$$

Hüpoteesi püstitusest lähtuvalt peab esimese valimi keskväärtus olema suurem teise valimi keskväärtustest, seega on valimite põhjal arvutatud statistiku väärtus t mittenegatiivne. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui kehtib tingimus

$$p_1 = P\left(T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha.$$

Teise ühepoolse hüpoteesi kontrollimiseks saab esitada paari:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,} \\ H_1 &: \quad \mu_1 < \mu_2, \text{ teise üldkogumi keskväärtus on suurem.} \end{aligned}$$

Valimite põhjal arvutatud statistiku väärtus t on oodatavalt mittepositiivne, seega sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\left(T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus $T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$ on teoreetiline teststatistiku väärtus.

1.2.2 t-test erineva varieeruvusega valimite korral

Kui valimid on erineva varieeruvusega, ei saa hüpoteeside kontrollimiseks klassikalist Studenti t-testi kasutada.

Eeldused

Kahe üldkogumi keskväärtuste võrdlemiseks võib rakendada t-testi valimite erinevate varieeruvuse korral, kui mõlemad üldkogumid on

- sõltumatud;
- normaaljaotusega.

Teststatistik

Ka selle t-testi juures vaadeldakse statistikuna valimite keskväärtuste standardiseeritud vahet, kuid keskväärtuste vahede standardhälbe leidmisel ei saa kasutada valimitest arvutatud ühist dispersiooni. Seega

$$S_* = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}.$$

Sel juhul on teststatistik T nullhüpoteesi kehtides t-jaotusega, kuid klassikalisest testist erineva vabadusastmete arvuga ν,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_*} \overset{H_0}{\sim} t_\nu,$$

kus $\bar{X}_1$ ja $\bar{X}_2$ on teoreetiliste valimite keskväärtused.

Vabadusastmete arv ν arvutatakse Welch-Satterthwaite'i meetodil (Prins) valemiga

$$\nu = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}, \tag{6}$$

kus S_1 ja S_2 on teoreetiliste valimite dispersioonid.

Statistiliste hüpoteeside kontrollimiseks arvutatakse antud valimite põhjal teststatistiku väärtus

$$t = T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \tag{7}$$

kus $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ on valimite keskväärtused ning s_1 ja s_2 valimite dispersioonid.

Kahepoolne hüpotees

Hüpoteeside paarid ja otsuste langetamise eeskirjad on samad punktis 1.2.1 esitatud t-testi hüpoteeside kontrollimise eeskirjadega:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on erinevad,}$$

sisukas hüpotees võetakse vastu, kui kehtib tingimus

$$p_2 = P\left(|T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| \geq |t| \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha.$$

Ühepoolsed hüpoteesid

Ka ühepoolsete hüpoteeside korral on hüpoteeside paarid ja otsuse langetamise eeskirjad samad punktis 1.2.1 tooduga:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 > \mu_2, \text{ esimese üldkogumi keskväärtus on suurem,}$$

sisukas hüpotees võetakse vastu, kui kehtib

$$p_1 = P\left(T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

või

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on võrdsed,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 < \mu_2, \text{ teise üldkogumi keskväärtus on suurem,}$$

sisukas hüpotees võetakse vastu, kui kehtib tingimus

$$p_1 = P\left(T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus $T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$ on teoreetiline statistik ja t on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

1.2.3 F-test üldkogumite varieeruvuste võrdlemiseks

F-testi abil on võimalik otsustada normaaljaotusega üldkogumite dispersioonide erinevuse üle. F-testi kasutatakse sageli üldkogumite keskmiste väärtuste erinevuse kontrollimisel t-testi valimiseks.

Eeldused

Kahe üldkogumi dispersioonide või standardhälvete hindamiseks võib rakendada F-testi, kui

- mõlemad üldkogumid on normaaljaotusega;
- üldkogumid on sõltumatud.

Teststatistik

Üldkogumi dispersiooni hinnanguks on valimi dispersioon. Dispersioonide võrdlemiseks on loomulik kasutada valimi dispersioonide vahe või dispersioonide suhte jaotust, millest statistiliste hüpoteeside kontrollimisel kasutatakse viimast, sest suhte jaotus on lihtsamini leitav.

Üldkogumite võrdsete dispersioonide korral, st nullhüpoteesi kehtimisel, on statistiku $F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$ jaotuseks F-jaotus parameetritega $n_1 - 1$ ja $n_2 - 1$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0}{\sim} F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Üldkogumite dispersioonide erinevuste kontrollimiseks arvutatakse valimite dispersioonide s_1 ja s_2 suhe f,

$$f = F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Kahepoolne hüpotees

Harilikult kasutatakse üldkogumite dispersioonide hindamisel kahepoolset hüpoteesi:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \text{ üldkogumite dispersioonid on võrdsed,} \\ H_1 &: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, \text{ üldkogumite dispersioonid on erinevad.} \end{aligned}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_2 = \begin{cases} P\,(\ F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq f \ \big| \ H_0\,) \leq \alpha/2, & \text{kui } f \geq 1, \\ P\,(\ F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq f \ \big| \ H_0\,) \leq \alpha/2, & \text{kui } f < 1, \end{cases}$$

kus f on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Ühepoolsed hüpoteesid

Harvemini leiavad kasutust ühepoolsed hüpoteesid:

$$\begin{aligned} H_0: &\ \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ \text{üldkogumite dispersioonid on võrdsed,} \\ H_1: &\ \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2,\ \text{esimese üldkogumi dispersioon on suurem,} \end{aligned}$$

sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\left(F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq f \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

$$\begin{aligned} H_0: &\ \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ \text{üldkogumite dispersioonid on võrdsed,} \\ H_1: &\ \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2,\ \text{teise üldkogumi dispersioon on suurem,} \end{aligned}$$

sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\left(F(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq f \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus f on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

1.2.4 Mann-Whitney U-test

Kui üldkogumite normaaljaotuse eeldus pole täidetud, saab sõltumatute üldkogumite keskväärtuste erinevuste kontrollimiseks kasutada mitteparameetrilisi teste. Mann-Whitney U-test ei kasuta vaatlustulemuste otseseid väärtusi, vaid nende paiknemist ühises variatsioonreas.

Mitteparameetrilise testina on U-testi võimsus väiksem t-testi võimsusest, kuid enamasti annab U-test t-testiga sama tulemuse. Kuna testimisel kasutatakse ainult valimite elementide järjestust, on U-test t-testist sobivam erinditega valimite analüüsimiseks.

Eeldused

Kahe üldkogumi keskväärtuste võrdlemiseks võib kasutada U-testi, kui

- üldkogumid on sõltumatud;
- üldkogumid on pidevad või omavad palju erinevaid väärtusi;
- uuritavad tunnused on vähemalt järjestustunnused.

Teststatistik

Mann-Whitney U-testi arvuliseks kirjeldamiseks kasutatakse kahte summaarset näitajat.

Esimese statistiku saamiseks leitakse igale esimese valimi elemendile temast väiksemate teise valimi elementide arv, saadud arvud summeritakse ja tähistatakse sümboliga U_-:

$$U_- = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} N_-(X_{1_i}, X_{2_j}), \tag{8}$$

kus

$$N_-(X_{1_i}, X_{2_j}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } X_{1_i} > X_{2_j}, \\ 1/2, & \text{kui } X_{1_i} = X_{2_j}, \\ 0, & \text{kui } X_{1_i} < X_{2_j}. \end{cases}$$

Teise statistiku saamiseks leitakse igale esimese valimi elemendile temast suuremate teise valimi elementide arv, saadud arvud summeritakse ja tähistatakse sümboliga U_+:

$$U_+ = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} N_+(X_{1_i}, X_{2_j}), \tag{9}$$

kus

$$N_+(X_{1_i}, X_{2_j}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } X_{1_i} < X_{2_j}, \\ 1/2, & \text{kui } X_{1_i} = X_{2_j}, \\ 0, & \text{kui } X_{1_i} > X_{2_j}. \end{cases}$$

Statistikute leidmise eeskirjadest lähtuvalt kehtib mugav seos arvutuste kontrollimiseks:

$$U_- + U_+ = n_1 n_2. \tag{10}$$

Nullhüpoteesi kehtides peaksid juhuslike valimite korral olema pooled esimese valimi elemendid suuremad teise valimi elementidest ja leitud statistikud U_- ja U_+ lähedaste väärtustega. Statistikute väärtuste suur erinevus ei oleks ootuspärane.

Hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse kirjeldatud statistikutest väiksemat:

$$U = \min(U_-, U_+). \tag{11}$$

Statistikute U_- ja U_+ teoreetilised jaotused nullhüpoteesi kehtimisel

Olgu mõlemas valimis kokku $n = n_1 + n_2$ elementi. Olgu valimite kõik elemendid üksteisest erinevad. Valimite elementidest moodustatakse ühine variatsioonrida

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)}.$$

Selle variatsioonrea põhjal moodustatakse n-elemendiline järjestus

$$z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n,$$

$$z_k = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_{(k)} \text{ kuulub esimesse valimisse,} \\ 1, & \text{kui } x_{(k)} \text{ kuulub teise valimisse.} \end{cases}$$

Arvestades, et valimites ei esine kordusi, avaldub statistiku U_+ väärtus vastavalt leidmise eeskirjale valemiga

$$u_+ = \sum_{z_i=0} \sum_{j>i} z_j.$$

U_+ võimalikud väärtused on täisarvud vahemikus nullist kuni $n_1 n_2$.

Kui mõlemas üldkogumis eeldada ühesugust jaotust, siis on kõik vaatlustulemuste järjestused võrdvõimalikud. Erinevaid järjestusi on võimalik moodustada täpselt nii palju, kui mitmel viisil saab paigutada n_1 esimese valimi elementi $n = n_1 + n_2$-elemendilisse järjestusse. Erinevaid võimalusi esimese ja teise valimi elementide järjestamiseks on

$$C_n^{n_1} = C_n^{n_2} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\, n_2!}.$$

Iga võimaliku järjestuse tõenäosus üldkogumite ühesuguse jaotuse korral on

$$P\,(\,Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_n = z_n \bigm| H_0\,) = \frac{1}{C_n^{n_1}}, \qquad z_k \in \{0,1\}.$$

Olgu selliste järjestuste arv, mille korral statistiku U_+ väärtuseks on u, tähistatud $a(u, n_1, n_2)$,

$$a(u, n_1, n_2) = \#(z_1, z_2, \ldots, z_n \bigm| \sum_{z_i=0} \sum_{j>i} z_j = u).$$

Siis üldkogumite ühesuguse jaotuse korral avaldub U_+-statistiku jaotus:

$$P\,(\,U_+ = u \bigm| H_0\,) = \frac{a(u, n_1, n_2)}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \qquad u = 0, 1, \ldots, n_1 n_2,$$

$$P\,(\,U_+ \le u \bigm| H_0\,) = \frac{\sum_{u_i=0}^{u} a(u_i, n_1, n_2)}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \qquad u = 0, 1, \ldots, n_1 n_2,$$

Statistiku U_+ teoreetilised esinemissagedused valimimahtude $n_1 = 3$ ja $n_2 = 4,\ 5,\ 6,\ 7$ on esitatud joonisel 1.

Näide:

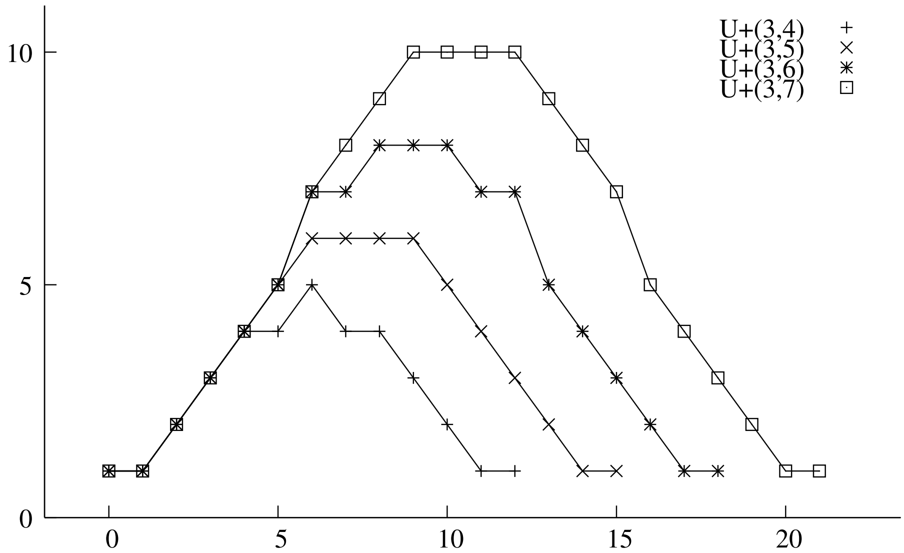
Olgu valimite mahud $n_1 = 2, n_2 = 3$. Kokku on $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$ erinevat järjestust esimese ja teise valimi ühise variatsioonrea moodustamiseks:

Võimalikud järjestused:

	U_+	U_-		U_+	U_-
0 0 1 1 1	6	0	1 0 1 0 1	3	3
0 1 0 1 1	5	1	1 0 1 1 0	2	4
0 1 1 0 1	4	2	1 1 0 0 1	2	4
1 0 0 1 1	4	2	1 1 0 1 0	1	5
0 1 1 1 0	3	3	1 1 1 0 0	0	6

U_+ (U_-) teoreetiline jaotustabel:

u_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$



Joonis 1. *$U_+(U_-)$-statistikute teoreetilised esinemissagedused $n_1 = 3, n_2 = 4, 5, 6, 7$*

Lemma 1. *U_+-statistiku jaotuse leidmise juures saab kasutada järgmist rekurrentset seost:*

$$a(u,\ n_1,\ n_2) = a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + \tag{12}$$

$$+\ a(u - n_1,\ n_1,\ n_2)\ -\ a(u - n_1 - n_2,\ n_1 - 1,\ n_2),$$

kusjuures

$$a(k,\ n_1,\ n_2) = a(k,\ n_1 - 1,\ n_2) = 0, \quad \text{kui } k < 0,$$

$$a(k,\ 1,\ n_2) = 1, \quad \text{iga } k = 0, \ldots, n_1 n_2.$$

Tõestus:

$$a(u,\ n_1,\ n_2) = \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n \mid \sum_{z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n} z_j = u) =$$

$$= \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0 \mid \sum_{z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n} z_j = u) +$$

$$+ \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 1 \mid \sum_{z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n} z_j = u) =$$

(kui suurim element valimitest moodustatud ühises variatsioonreas kuulub esimesse valimisse, siis $z_n = 0$ ja summasse skoori ei lisandu, kui ühise variatsioonrea viimane element kuulub teise valimisse, siis $z_n = 1$ ja skoori lisandub summasse iga esimese valimi elemendi korral)

$$= \#(\underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}}_{n_1-1 \text{ esimesest}} \mid \sum_{z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n-1} z_j = u) +$$

$$+ \#(\underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}}_{n_2-1 \text{ teisest}} \mid \sum_{z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n-1} z_j = u - n_1) =$$

$$= a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + a(u - n_1,\ n_1,\ n_2 - 1).$$

Järelikult peab kehtima ka võrdus

$$a(u - n_1,\ n_2,\ n_1) = a(u - n_1,\ n_2 - 1,\ n_1) + a(u - n_1 - n_2,\ n_2,\ n_1 - 1).$$

Arvestades jaotuse sümmeetrilisust ja kasutades viimast võrdust, siis

$$a(u,\ n_1,\ n_2) = a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + a(u - n_1,\ n_1,\ n_2 - 1) =$$

$$= a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + a(u - n_1,\ n_2 - 1,\ n_1) =$$

$$= a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + a(u - n_1,\ n_2,\ n_1) - a(u - n_1 - n_2,\ n_2,\ n_1 - 1) =$$

$$= a(u,\ n_1 - 1,\ n_2) + a(u - n_1,\ n_1,\ n_2) - a(u - n_1 - n_2,\ n_1 - 1,\ n_2).$$

$\square$

Statistikute U_+ ja U_- eeskirjadest lähtuvalt on mõlema statistiku teoreetilised jaotused samad (Klotz, 2005, lk 308).

Standardiseeritud teststatistik

Suurte valimite korral on nullhüpoteesi kehtides statistiku U ligikaudseks jaotuseks normaaljaotus keskväärtusega $n_1 n_2/2$ ja dispersiooniga $n_1 n_2(n_1+n_2+1)/12$ (Conover, 1971, lk 55, 233) ja otsuse langetamiseks võib kasutada standardiseeritud U-statistikut Z_U,

$$Z_U = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1). \tag{13}$$

Standardiseeritud statistikut võib kasutada alates valimimahtudest $n_1, n_2 > 8$. Lisaks on suurte valimite korral täpse U-statistiku jaotuse leidmine komplitseeritud.

Kahepoolne hüpotees

Üldkogumite keskmiste tasemete mõlemasuunaliste erinevuste kontrollimiseks esitatakse järgmine hüpoteeside paar:

$$H_0: \ \ \mu_1 = \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,}$$
$$H_1: \ \ \mu_1 \neq \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on erinevad.}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_2 = P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq u \;\middle|\; H_0 \right) + P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq n_1 n_2 - u \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus u on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui

$$p_2 = P\left(|Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| \geq |z_U| \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus z_U on valimite põhjal arvutatud standardiseeritud U-statistik.

Ühepoolsed hüpoteesid

Lisainformatsiooni olemasolul võidakse kasutada ühepoolseid hüpoteese:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,}$$
$$H_1: \ \mu_1 > \mu_2, \ \text{esimese üldkogumi keskmine tase on suurem.}$$

Kuna u on minimaalne valimite põhjal arvutatud u_- ja u_+ väärtustest, siis võetakse sisukas hüpotees vastu, kui

$$p_1 = P\,(\,U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le u \;\big|\; H_0\,) \le \alpha.$$

Statistiku Z_U väärtus arvutatakse minimaalsemat u_- või u_+ väärtust kasutades, järelikult on $z_U \le 0$. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\,(\,Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le z_U \;\big|\; H_0\,) \le \alpha.$$

Teine ühepoolsete hüpoteeside paar on:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,}$$
$$H_1: \ \mu_1 < \mu_2, \ \text{teise üldkogumi keskmine tase on suurem.}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\,(\,U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le u \;\big|\; H_0\,) \le \alpha,$$

kus $u = \min(u_-, u_+)$ on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse sisukas hüpotees vastu, kui

$$p_1 = P\,(\,Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le z_U \;\big|\; H_0\,) \le \alpha,$$

kus z_U on antud valimitest arvutatud standardiseeritud statistiku väärtus.

1.2.5 Wilcoxoni test

Mann-Whitney testiga analoogiline mitteparameetriline test on Wilcoxoni test, mis kasutab vaatlustulemuste asemel nende astakuid. Mann-Whitney ja Wilcoxoni testid annavad hüpoteeside kontrollimisel sama otsuse. Wilcoxoni testi idee on arusaadavam - valimitest moodustatakse ühine variatsioonrida, võrreldakse esimese ja teise valimi astakute summasid, kuid Mann-Whitney test sobib paremini arvutil realiseerimiseks, ei nõua variatsioonrea moodustamist ega lisaarvutusi korduvate elementide astakute leidmisel.

Eeldused

Üldkogumite keskväärtuste analüüsimiseks võib kasutada Wilcoxoni testi, kui on täidetud järgmised eeldused:

- üldkogumid on sõltumatud;
- üldkogumid on pidevad või omandavad palju erinevaid väärtusi;
- väärtused on järjestatavad.

Teststatistik

Wilcoxoni test kasutab otseste mõõtmistulemuste asemel astakuid. Kahest valimist moodustatakse ühine variatsioonrida. Vaatlustulemuse astakuks on tema järjekorranumber valimite ühises variatsioonreas. Võrdsete vaatlustulemuste astakud on samad - vaatluste järjekorranumbrite keskväärtus. Sel viisil saadud valimite astakute summasid nimetatakse Wilcoxoni statistikuteks. Esimese valimi astakute summat tähistatakse sümboliga W_1, teise valimi astakute summat W_2:

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1_i}), \tag{14}$$

$$W_2 = \sum_{j=1}^{n_2} R(X_{2_j}), \tag{15}$$

kus $R(X)$ on vaatlustulemuse X astak mõlemast valimist moodustatud ühises variatsioonreas.

Astakute summa kui aritmeetilise jada summa, avaldub:

$$W_1 + W_2 = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}.$$

Valimite erinevate mahtude korral võrreldakse valimite keskmiseid astakuid:

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= W_1/n_1, \\ \bar{W}_2 &= W_2/n_2. \end{aligned}$$

Kui võrreldavates üldkogumites on ühesugune jaotus, siis on ühises variatsioonreas valimite elemendid segunenud ja leitud keskmised astakute $\bar{W}_1$ ja $\bar{W}_2$ väärtused oleksid lähedased. Ühe valimi elementide koondumine ühise variatsioonrea algusse või lõppu, mis annaks väga erinevad $\bar{W}_1$ ja $\bar{W}_2$ väärtused, oleksid nullhüpoteesi kehtides ebatõenäolised.

Lemma 2. *U-statistikud avalduvad Wilcoxoni statistikute kaudu:*

$$U_- = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}, \quad (16)$$

$$U_+ = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}. \quad (17)$$

Tõestus:

Olgu valimites kokku $n = n_1 + n_2$ elementi. Valimite ühise variatsioonrea alusel on moodustatud teoreetiline järjestus

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n),$$

$$Z_k = \begin{cases} 0, & \text{kui variatsioonrea element kuulub esimesse valimisse,} \\ 1, & \text{kui variatsioonrea element kuulub teise valimisse.} \end{cases}$$

Statistikud W_2 ja U_+ avalduvad:

$$W_2 = \sum_{Z_i} \sum_{j=i}^{n} Z_j,$$

$$U_+ = \sum_{Z_i=0} \sum_{j=i+1}^{n} Z_j = \sum_{Z_i=0} \sum_{j=i}^{n} Z_j.$$

Nende statistikute vahe on:

$$W_2 - U_+ = \sum_{Z_i} \sum_{j=i}^{n} Z_j - \sum_{Z_i=0} \sum_{j=i}^{n} Z_j =$$

$$= \sum_{Z_i=1} \sum_{j=i}^{n} Z_j = n_2 + (n_2 - 1) + (n_2 - 2) + \cdots + 1 = \frac{n_2(n_2+1)}{2}.$$

Statistikute W_1 ja U_- vahe avaldub:

$$W_1 - U_- = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} - W_2 - (n_1 n_2 - U_+) =$$

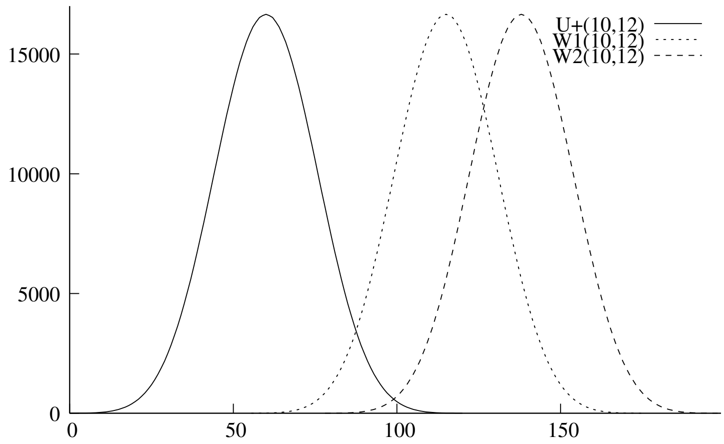
$$= \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2} - n_1 n_2 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}.$$

Valimite võrdsed elemendid mõjutavad mõlema statistiku väärtust ühtmoodi, seosed (16, 17) jäävad kehtima. $\square$

Statistikute W_1 ja W_2 teoreetilised jaotused nullhüpoteesi kehtides

Wilcoxoni teoreetilised statistikud on võrreldes U-statistikutega sama hajuvusega, kuid nihkega (16, 17). Kui statistikute U_- ja U_+ jaotused on samad sõltumata erinevate mahtudega valimite omavahelisest järjestusest, siis statistikute W_1 ja W_2 jaotused on võrreldavate valimite erinevate mahtude korral nihkega (joonis 4).

Valimite erinevate mahtude korral võrreldavate teoreetiliste astakute keskmised $\bar{W}_1$ ja $\bar{W}_2$ on sama keskväärtusega, kuid erineva hajuvusega (joonis **??**).



Joonis 2. *Statistikute U_+ (U_-), W_1 ja W_2 teoreetilised esinemissagedused valimimahtude $n_1 = 10, n_2 = 12$ korral*

Standardiseeritud teststatistikud

Wilcoxoni statistikute W_1 ja W_2 jaotused nullhüpoteesi kehtimisel lähenevad võrreldavate valimite mahtude kasvamisel normaaljaotustele keskväärtustega vastavalt $n_1(n_1+n_2+1)/2$ ja $n_2(n_1+n_2+1)$ ning dispersiooniga $n_1n_2(n_1+n_2+1)/12$ (Conover, 1971, lk 55, 233):

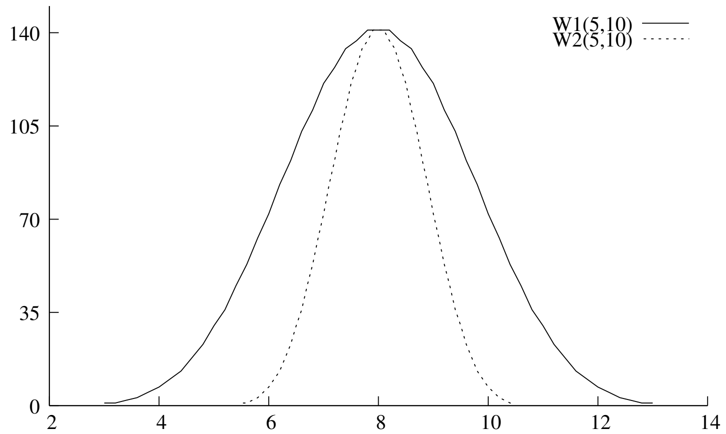
$$
\begin{aligned}
Z_{W_1} &= \frac{W_1 - \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}}} \sim N(0,1), \\
Z_{W_2} &= \frac{W_2 - \frac{n_2(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}}} \sim N(0,1).
\end{aligned}
$$

Standardiseeritud W-statistikuid võib kasutada valimimahtude $n_1, n_2 > 8$ korral.

Kahepoolne hüpotees

Üldkogumite keskmiste tasemete erinevuste kontrollimiseks esitatakse järgmine hüpoteeside paar:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \ \mu_1 = \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,} \\
H_1 &: \ \mu_1 \neq \mu_2, \ \text{üldkogumite keskmised tasemed on erinevad.}
\end{aligned}
$$



Joonis 3. *Keskmiste astakute $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$ teoreetilised esinemissagedused valimimahtude $n_1 = 5, n_2 = 10$ korral*

W-statistikutelt võib olulisuse tõenäosust mõjutamata minna valemite (16, 17) abil üle sobivamate omadustega U-statistikutele. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le u \;\middle|\; H_0 \right) + P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \ge n_1 n_2 - u \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha,$$

kus u on valimite põhjal arvutatud U-statistiku väärtus.

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\left(|Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| > |z_{W_1}| \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha,$$

kus z_{W_1} on valimite põhjal arvutatud standardiseeritud W_1-statistik, mis on üldkogumite võrdsete keskmiste tasemete korral normaaljaotusega.

Ühepoolsed hüpoteesid

Üldkogumite kohta lisainformatsiooni korral võib keskväärtuste erinevuse kontrollimiseks esitada ühepoolsed hüpoteesid:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,}$$

$$H_1: \quad \mu_1 > \mu_2, \text{ esimese üldkogumi keskmine tase on suurem.}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le u \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha,$$

kus u on valimite põhjal arvutatud U-statistiku väärtus.

Kui esimese valimi keskväärtus on oodatavalt suurem teise valimi keskväärtusest, siis peab valimite põhjal arvutatud w_1 väärtus olema suurem ühise variatsioonrea keskmise astaku ja esimese valimi mahu korrutisest, järelikult on z_{W_1} väärtus positiivne. Seega võetakse standardiseeritud statistiku kasutamisel vastu sisukas hüpotees, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \ge z_{W_1} \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha,$$

kus z_{W_1} on valimite põhjal arvutatud standardiseeritud W_1-statistiku väärtus.

Teisesuunaline ühepoolsete hüpoteeside paar keskväärtuste erinevuste kontrollimiseks on:

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskmised tasemed on võrdsed,}$$
$$H_1 : \quad \mu_1 < \mu_2, \text{ teise üldkogumi keskmine tase on suurem.}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui U-statistiku kaudu väljendatud olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(U(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le u \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha,$$

kus u on valimite põhjal arvutatud minimaalsema U-statistiku väärtus.

Antud valimitest arvutatud standardiseeritud statistiku väärtus z_{W_1} on oodatavalt negatiivne. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(Z(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \le z_{W_1} \;\middle|\; H_0 \right) \le \alpha.$$

1.3 Keskmiste võrdlemine sõltuvate valimite korral

Üldkogumis muutunud tingimuste mõjutuste (nt ravimi mõju) uurimiseks võib kasutada keskmiste võrdlemise teste sõltuvatele valimitele. Sõltuvad valimid moodustatakse üldkogumi samadest objektidest ja neil hinnatakse kahe korduva mõõtmise erinevusi. Kui korduvaid mõõtmisi ei ole võimalik läbi viia, siis moodustatakse valimid üldkogumi sarnaste objektide paaridest ning kumbki paarilistest asetatakse erinevatesse tingimustesse.

Sõltuvate valimite korral leitakse iga valimi elemendi esimese ja teise mõõtmise vahe. Statistiline otsus langetatakse nende mõõtmiste vahede valimi põhjal. Kui tingimuste muutus mõõtmistel ei mõjuta üldkogumi keskväärtust, on vahede valimi keskväärtus oodatavalt nullilähedane.

1.3.1 t-test sõltuvate valimite korral

Parameetrilistest testidest üks levinum on t-test. Suurte valimite vahede keskväärtust kirjeldab normaaljaotus. Kui üldkogumid on normaaljaotustega, saab väikeste valimimahtude korral üldkogumi muutuste hindamiseks rakendada t-testi – vahede keskväärtus on sel juhul normaaljaotusele lähedase t-jaotusega.

Eeldused

Sõltuvate valimite vahede keskväärtuste erinevuste olulisust saab kontrollida t-testiga, kui on täidetud järgmine eeldus:

- sõltuvate üldkogumite vahed on normaaljaotustega.

Teststatistik

Keskväärtuste erinevuse hindamisotsus langetatakse sõltuvate valimite vahede valimi põhjal. Olgu vaatlusaluste paaride arv valimites n. Mõlema valimi sama või sarnase elemendi korral leitakse esimesel ja teisel korral saadud mõõtmiste vahe

$$V_i = X_{1_i} - X_{2_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vahede valimi $\mathbf{V}$ keskväärtus ja standardhälve avalduvad valemitest (1), (3):

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i,$$

$$S_v = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2}.$$

Kui üldkogumite erinevad mõjutused ei muuda kogumite keskväärtusi, peaks vahede valimi keskväärtus olema nullilähedane. Oluliselt erinevate mõjude korral peaks muudatus kajastuma valimite vahes ja vahede keskväärtus erinema märgatavalt nullist.

Üldkogumite keskväärtuste erinevuste kontrollimiseks kasutatakse vahede standardiseeritud keskväärtust

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{V}}{S_v} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}. \tag{18}$$

Teoreetiline teststatistik $T(\mathbf{V})$ on üldkogumite samade keskväärtuste korral ehk nullhüpoteesi kehtides Studenti t-jaotusega vabadusastmete arvuga $n - 1$.

Hüpoteeside kontrollimiseks arvutatakse antud vahede valimi $\mathbf{v}$ põhjal teststatistiku väärtus:

$$t = T(\mathbf{v}) = \sqrt{n}\frac{\bar{v}}{s_v}, \tag{19}$$

kus $\bar{v}$ ja s_v on vastavalt vahede valimi keskväärtus ja dispersioon.

Kahepoolne hüpotees

Kahe sõltuva valimi keskväärtuste erinevuste kontrollimiseks esitatakse hüpoteeside paar:

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{ei mõjuta keskväärtust,} \\
H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 \neq 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{mõjutab keskväärtust.}
\end{aligned}
$$

Kui vahede valimist arvutatud teststatistiku t väärtusega võrdsete või sellest veel ekstremaalsemate väärtuste esinemise tõenäosus t-jaotuse korral on mittesuurem valitud olulisuse nivoost,

$$
p_2 = P\left(|T(\mathbf{V})| \geq |t| \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha.
$$

võetakse vastu sisukas hüpotees.

Ühepoolsed hüpoteesid

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib uuritava tunnuse väärtusi vaid vähendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{ei mõjuta keskväärtust,} \\
H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 > 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{vähendab keskväärtust.}
\end{aligned}
$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$
p_1 = P\left(T(\mathbf{V}) \geq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,
$$

kus oodatavalt positiivne t on valimitest arvutatud teststatistiku väärtus.

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib elementide väärtusi vaid suurendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: &\quad \mu_1 - \mu_2 = 0, &&\text{muutunud tingimus üldkogumis}\\
& &&\text{ei mõjuta keskväärtust},\\
H_1: &\quad \mu_1 - \mu_2 < 0, &&\text{muutunud tingimus üldkogumis}\\
& &&\text{suurendab keskväärtust.}
\end{aligned}
$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(T(\mathbf{V}) \leq t \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus oodatavalt negatiivne t on valimite vahede põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

1.3.2 Märgitest

Märgitest on lihtne mitteparameetriline test sõltuvate valimite keskmiste taseme-te erinevuste kohta esitatud hüpoteeside kontrollimiseks. Testimisel vaadeldakse vaid valimite vahede märke. Kuna märgitest ei kasuta kogu valimites sisalduvat informatsiooni, siis on test küllaltki madala võimsusega. Samas ei ole märgitest nõudlik eelduste suhtes, olles seega eriti sobiv valimite erinevuse esmaseks hindamiseks.

Eeldused

Sõltuvate valimite keskmiste tasemete erinevuse hindamiseks võib kasutada märgitesti, kui

- uuritavad tunnused on vähemalt järjestustunnused.

Teststatistik

Märgitestis vaadeldakse sõltuvate vaatluste vahede märke: loetakse kokku positiivsed ja negatiivsed esimese ja teise mõõtmise vahed. Otsuse langetamisel arvestatakse ainult nullist erinevaid vaatluspaare, olgu nende vaatluste arv n_0.

Kui üldkogumis muutunud tingimus ei mõjuta üldkogumi keskmist taset, st kehtib nullhüpotees, siis on üldkogumist moodustatud valimite positiivsed ja negatiivsed vahed võrdvõimalikud. Suured erinevused positiivsete ja negatiivsete vahede arvudes ei oleks ootuspärased.

Märgitesti statistikuna kasutatakse valimite positiivsete vahede arvu. Teststatistik N_+ on nullhüpoteesi kehtides binoomjaotusega ja avaldub valemiga

$$N_+ = \sum_{i=1}^{n} S(X_{1_i}, X_{2_i}) \overset{H_0}{\sim} B(n_0, 0,5), \tag{20}$$

kus

$$S(X_{1_i}, X_{2_i}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } X_{1_i} > X_{2_i}, \\ 0, & \text{kui } X_{1_i} \leq X_{2_i}. \end{cases}$$

Standardiseeritud teststatistik

Valimimahtude kasvades läheneb statistiku N_+ jaotus nullhüpoteesi kehtides normaaljaotusele keskväärtusega $n_0/2$ ja dispersiooniga $n_0/4$ (Conover, 1971, lk 46, 54):

$$Z_+ = \frac{N_+ - \frac{n_0}{2}}{\sqrt{\frac{n_0}{4}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1). \tag{21}$$

Standardiseeritud statistikut Z_+ võib statistiliste järelduste tegemiseks kasutada alates nullist erinevate vaatluspaaride vahede arvust $n_0 > 10$.

Kahepoolne hüpotees

Kahe sõltuva valimi keskmiste tasemete erinevuse olulisuse kontrollimiseks püstitatakse hüpoteeside paar:

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\
H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 \neq 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{mõjutab keskmist taset.}
\end{aligned}
$$

Nullhüpoteesi kehtides peaks teststatistiku väärtus olema lähedane statistiku N_+ keskväärtusele $n_0/2$. Kui valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtuse n_+ esinemine on vähetõenäoline nullhüpoteesile vastava binoomjaotuse korral, siis võetakse vastu sisukas hüpotees. Kriitiliste piirkondade ja valitud olulisuse nivoo tingimusena esitatud sisuka hüpoteesi vastuvõtmise eeskiri on kujul

$$
p_2 = \begin{cases}
P\,(\,N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq n_+ \,\big|\, H_0\,) + \\
\qquad + P\,(\,N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq n_0 - n_+ \,\big|\, H_0\,) \leq \alpha, & \text{kui } n_+ \leq n_0/2, \\
P\,(\,N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq n_0 - n_+ \,\big|\, H_0\,) + \\
\qquad + P\,(\,N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq n_+ \,\big|\, H_0\,) \leq \alpha, & \text{kui } n_+ > n_0/2,
\end{cases}
$$

kus n_+ on positiivsete vahede arv mittenulliliste vahede arvu n_0 hulgas.

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui olulisuse tõenäosus rahuldab tingimust

$$
p_2 = P\,(\,|Z_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| \geq |z_+|) \leq \alpha,
$$

kus z_+ on valimitest arvutatud standardiseeritud teststatistiku väärtus.

Ühepoolsed hüpoteesid

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib objektide väärtusi vaid vähendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: &\quad \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
&&& \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\
H_1: &\quad \mu_1 - \mu_2 > 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
&&& \text{vähendab keskmist taset.}
\end{aligned}
$$

Oodatavalt on enam kui pooled vahedest positiivsed. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus rahuldab tingimust

$$p_1 = P\left(N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq n_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus n_+ on valimite põhjal leitud positiivsete vahede arv.

Üldkogumi lisateabe põhjal on oodatavalt $n_+ \geq n_0/2$, järelikult $z_+ \geq 0$. Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui

$$p_1 = P\left(Z_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq z_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus z_+ on konkreetsete valimite põhjal arvutatud standardiseeritud teststatistiku väärtus.

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib elementide väärtusi vaid suurendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: &\quad \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
&&& \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\
H_1: &\quad \mu_1 - \mu_2 < 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
&&& \text{suurendab keskmist taset.}
\end{aligned}
$$

Oodatavalt on vähem kui pooled vahed positiivsed. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(N_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq n_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus n_+ on valimite põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Üldkogumi lisateabe põhjal on oodatavalt $n_+ \leq n_0/2$, järelikult $z_+ \leq 0$. Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui

$$p_1 = P\left(Z_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq z_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus z_+ on konkreetsete valimite põhjal arvutatud standardiseeritud teststatistiku väärtus.

1.3.3 Wilcoxoni astakmärgitest

Kui märgitest kasutab ainult valimite vahede märke, siis Wilcoxoni astakmärgitest arvestab ka vahede suurusega.

Eeldused

Sõltuvate üldkogumite keskmiste tasemete võrdlemiseks võib kasutada Wilcoxoni astakmärgitesti, kui

- uuritavad tunnused on vähemalt järjestustunnused;
- vahede valim on sümmeetrilise jaotusega;
- valimite vahed on sõltumatud.

Teststatistik

Wilcoxoni astakmärgitest vaatleb sõltuvate valimite testidele omaselt valimite vahesid

$$V_i = X_{1_i} - X_{2_i}.$$

Statistilise otsuse langetamisel arvestatakse ainult nullist erinevate vaatlustulemuste paare, olgu nende arv n_0.

Vahede absoluutväärtused järjestatakse kasvavalt. Igale vahele leitakse astak - järjekorranumber vahede absoluutväärtuste variatsioonreas, võrdsete absoluutväärtustega vahed saavad ühise astaku - nende vahede järjekorranumbrite keskväärtuse. Teststatistikutena kasutatakse negatiivsete ja positiivsete vahede astakute summasid.

Wilcoxoni statistikud W_- ja W_+ avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} W_- &= \sum_{i=1}^{n} S_-(V_i) \cdot R_{abs}(V_i), \\ W_+ &= \sum_{i=1}^{n} S_+(V_i) \cdot R_{abs}(V_i), \end{aligned}$$

kus

$$S_-(V_i) = \begin{cases} 1, & \text{kui } V_i < 0, \\ 0, & \text{kui } V_i \geq 0, \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad S_+(V_i) = \begin{cases} 1, & \text{kui } V_i > 0, \\ 0, & \text{kui } V_i \leq 0, \end{cases}$$

ning $R_{abs}(V_i)$ on vahe V_i astak vahede absoluutväärtuste variatsioonreas.

Kui muutunud tingimus ei mõjuta üldkogumi keskmist taset, siis peaksid valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonreas negatiivsed ja positiivsed vahed olema hästi segunenud. Samamärgiliste vahede koondumine variatsioonrea algusse või lõppu, mis tähendaks valimitest arvutatud statistikute w_- ja w_+ oluliselt erinevaid väärtusi, oleks nullhüpoteesi kehtides ebatõenäoline.

Positiivsete ja negatiivsete vahede astakute summa on esitatav kui kõikide vahede aritmeetilise jada summa:

$$W_- + W_+ = \frac{n_0(n_0+1)}{2}. \tag{22}$$

Statistikute W_- ja W_+ väärtused saavad olla lõigus $[0, n_0(n_0+1)/2]$, nt kui kõik vahed on positiivsed, siis $w_- = 0$ ja w_+ väärtus on võrdne kõikide astakute summaga $n_0(n_0+1)/2$.

Otsuse langetamiseks kasutatakse kahest Wilcoxoni statistikust minimaalsemat:

$$W = \min(W_-, W_+).$$

Statistikute W_- ja W_+ teoreetilised jaotused nullhüpoteesi kehtides

Olgu valimite vahede arv n. Olgu kõik vahed mittenullilised ja üksteisest erinevad. Valimite vahede absoluutväärtustest moodustatakse variatsioonrida

$$v_{[1]}, v_{[2]}, \ldots, v_{[n-1]}, v_{[n]}.$$

Selle variatsioonrea põhjal moodustatakse n-elemendiline järjestus

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n,$$

$$z_k = \begin{cases} 0, & \text{kui vahe } v_{[k]} \text{ on negatiivne,} \\ 1, & \text{kui vahe } v_{[k]} \text{ on positiivne.} \end{cases}$$

Mittekorduvate väärtustega vahede korral avaldub Wilcoxoni statistik W_+ valemiga

$$W_+ = \sum_{k=1}^{n} k z_k.$$

Statistiku võimalikud väärtused on täisarvud vahemikus nullist kuni $n(n+1)/2$.

Iga vahe n-elemendilises variatsioonreas võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Seega on vahedest võimalik moodustada 2^n erinevat järjestust. Kui mõlemas üldkogumis eeldada ühesugust jaotust, siis on kõik positiivsete ja negatiivsete vahede järjestused võrdvõimalikud. Iga järjestuse tõenäosus avaldub:

$$P\left(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_n = z_n \;\middle|\; H_0 \right) = \frac{1}{2^n}, \qquad z_k \in \{0, 1\}.$$

Olgu selliste järjestuste arv, mille korral statistiku W_+ väärtuseks on vahede arvu n juures w, tähistatud $a(w, n)$,

$$a(w,\ n) = \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n \mid \sum_{k=1}^{n} k z_k = w).$$

Seega W_+ teoreetiline jaotus nullhüpoteesi kehtimisel on:

$$P\,(\,W_+ = w \,\big|\, H_0\,) = \frac{a(w,n)}{2^n}, \quad w = 0, \ldots, \frac{n(n+1)}{2},$$
$$P\,(\,W_+ \leq w \,\big|\, H_0\,) = \frac{\sum_{w_i=0}^{w} a(w,\ n)}{2^n}, \quad w = 0, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}.$$

Näide:

Olgu valimites vahesid $n = 3$ (kõik erinevad ja mittenullilised). Kokku on seega $2^3 = 8$ võimalikku erinevat võimalust valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonrea moodustamiseks.

Võimalikud järjestused:

			W_+	W_-				W_+	W_-
0	0	0	0	6	0	0	1	3	3
1	0	0	1	5	1	0	1	4	2
0	1	0	2	4	0	1	1	5	1
1	1	0	3	3	1	1	1	6	0

Statistiku W_+ (W_-) teoreetiline jaotustabel:

w_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Statistiku W_+ teoreetilised esinemissagedused erinevatel valimimahtudel on esitatud joonisel 4.

Lemma 3. *Kehtib järgmine rekurrentne seos (Klotz, 2005, lk 298):*

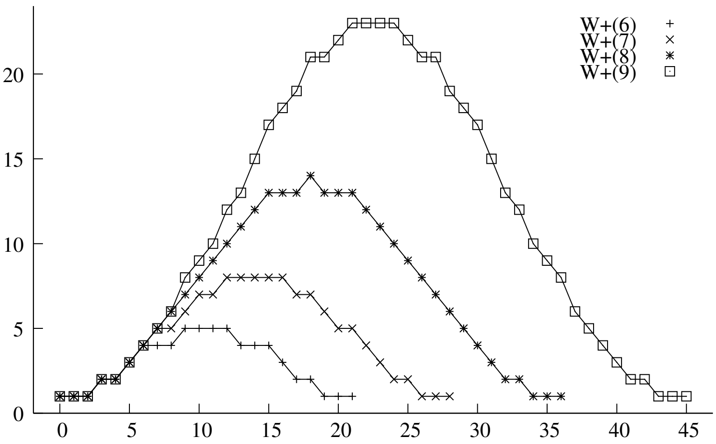
$$a(w,\ n) = a(w,\ n-1) + a(w-n,\ n-1), \tag{23}$$

kus

$$a(k,\ n) = 0, \quad \text{kui } k < 0 \ \text{ või } \ k > \frac{n(n+1)}{2},$$
$$a(0,\ 1) = a(1,\ 1) = 1.$$

Tõestus:

$$a(w,\ n) = \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n \mid \sum_{k=1}^{n} zk_n = w) =$$



Joonis 4. *$W_+(W_-)$-statistikute teoreetilised esinemissagedused $n = 6, 7, 8, 9$*

$$= \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0 \mid \sum_{k=1}^{n-1} zk_n = w) +$$

$$+ \#(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 1 \mid \sum_{k=1}^{n-1} zk_n = w - n) =$$

$$= a(w,\ n-1) + a(w-n,\ n-1).$$

□

Statistikute W_+ ja W_- eeskirjadest lähtuvalt on mõlema statistiku teoreetilised jaotused nullhüpoteesi kehtimisel samad (Klotz, 2005, lk 299).

Standardiseeritud teststatistik

Valimite vaatluspaaride arvu kasvamisel läheneb statistiku W jaotus nullhüpoteesi kehtimisel normaaljaotusele keskväärtusega $n_0(n_0+1)/4$ ja dispersiooniga $n_0(n_0+1)(2n_0+1)/24$ (Conover, 1971, lk 40, 45, 213) ning statistilise otsuse langetamiseks võib kasutada standardiseeritud W-statistikut Z_W,

$$Z_W = \frac{W - \frac{n_0(n_0+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{24}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1). \tag{24}$$

Standardiseeritud statistiku kasutamiseks peab valimite mittenulliliste vahede arv $n_0 > 15$.

Kahepoolne hüpotees

Kahe sõltuva valimi keskväärtuste olulise erinevuse kontrollimiseks esitatakse hüpoteeside paar:

$$\begin{aligned} H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\ & && \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\ H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 \neq 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\ & && \text{mõjutab keskmist taset.} \end{aligned}$$

Nullhüpoteesi kehtimisel peaksid valimite põhjal arvutatud positiivsete ja negatiivsete vahede astakute summad w_+ ja w_- olema oodatavalt lähedaste väärtustega. Arvutatud statistikute väärtuste suur erinevus ei oleks tõenäoline ja vastu võetakse sisukas hüpotees, kui olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\,(\,W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq w \;\big|\; H_0\,) +$$
$$+\, P\,(\,W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq \frac{n_0(n_0+1)}{2} - w \;\big|\; H_0\,) \leq \alpha,$$

kus w on valimite vahede põhjal arvutatud teststatistiku väärtus.

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\,(\,|Z_W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})| \geq |z_W| \;\big|\; H_0\,) \leq \alpha,$$

kus z_W on valimite vahede põhjal arvutatud standardiseeritud W-statistik.

Ühepoolsed hüpoteesid

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib objektide väärtusi vaid vähendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\
H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 > 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{vähendab keskmist taset.}
\end{aligned}
$$

Oodatavalt on positiivsete astakute summa w_+ suurem negatiivsete astakute summast w_-. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(W_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq w_+ \;\middle|\; H_0 \right) =$$

$$= P\left(W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq w \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha.$$

Kuna minimaalne väärtus $w = \min(w_-, w_+)$ on (22) põhjal alati väiksem või võrdne poolest valimite astakute summast, järelikult $z_W \leq 0$. Seega võetakse standardiseeritud statistiku kasutamisel vastu sisukas hüpotees, kui

$$p_1 = P\left(Z_W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq z_W \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus Z_W on teoreetiline statistik ja z_w vahede valimi põhjal arvutatud standardiseeritud teststatistiku väärtus.

Kui saab eeldada, et muutunud tingimus üldkogumis võib elementide väärtusi vaid suurendada, kasutatakse muutuse olulisuse kontrollimiseks ühepoolset hüpoteeside paari:

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \mu_1 - \mu_2 = 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{ei mõjuta keskmist taset,} \\
H_1: \quad & \mu_1 - \mu_2 < 0, && \text{muutunud tingimus üldkogumis} \\
& && \text{suurendab keskmist taset.}
\end{aligned}
$$

Oodatavalt on positiivsete astakute summa w_+ väiksem negatiivsete astakute summast w_-. Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_1 = P\left(W_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq w_+ \;\middle|\; H_0 \right) =$$

$$= P\left(W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq w \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha.$$

Standardiseeritud statistiku kasutamisel võetakse vastu sisukas hüpotees, kui

$$p_1 = P\left(Z_W(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \leq z_W \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus z_W on valimite vahede põhjal arvutatud standardiseeritud teststatistiku väärtus.

1.4 Jaotuste võrdlemine

Kui eelnevad testid võrdlesid üldkogumite keskväärtusi, siis järgneva testi abil saab võrrelda üldkogumite jaotusi.

1.4.1 Kolmogorov-Smirnovi test

Kolmogorov-Smirnovi test on mitteparameetriline test üldkogumite jaotuste võrdlemiseks. Kuigi test võrdleb üldkogumite jaotusi, on Kolmogorov-Smirnovi teststatistikud jaotusvabad. Kolmogorov-Smirnovi testi võib kasutada erinevalt χ^2-testist ka suhteliselt väikeste valimite korral. Kolmogorov-Smirnovi testis vaadeldakse statistikutena valimite empiiriliste jaotusfunktsioonide erinevusi.

Eeldused

Kolmogorov-Smirnovi test sobib kahe üldkogumi jaotuste võrdlemiseks, kui

- üldkogumid on sõltumatud,
- uuritavad tunnused vähemalt järjestustunnused.

Teststatistik

Üldkogumitele jaotusfunktsioonidega $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ leitakse mõlema valimi põhjal empiirilised jaotusfunktsioonid $G_1(x)$ ja $G_2(x)$. Empiirilise jaotusfunktsiooni väärtuseks punktis x on sellest väärtustest väiksemate või võrdsete väärtuste osakaal antud valimis:

$$G_1(x) = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} N(x_{1_i}, x), \quad G_2(x) = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} N(x_{2_j}, x),$$

$$\text{kus} \quad N(x_*, x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x_* \le x, \\ 0, & \text{kui } x_* > x. \end{cases}$$

Ühepoolsete statistiliste hüpoteeside kontrollimiseks leitakse väärtused:

$$D_+ = \max(G_1(x) - G_2(x)), \tag{25}$$

$$D_- = \max(G_2(x) - G_1(x)) \tag{26}$$

ja kahepoolse hüpoteesi korral väärtus

$$D = \max \left| G_1(x) - G_2(x) \right| = \max(D_+, D_-), \tag{27}$$

kasutades kõiki argumentväärtusi, kus vähemalt üks valimite empiirilistest jaotusfunktsioonidest muutub.

Olgu statistikud, mille valimitest leitud väärtusteks on D_+, D_- ja D, tähistatud vastavalt T_+, T_- ja T.

Teststatistikute teoreetiline jaotus

Olgu kahes valimis kokku $n = n_1 + n_2$ elementi ja olgu valimite kõik elemendid üksteisest erinevad. Valimite elementidest moodustatakse ühine variatsioonrida

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}.$$

Selle variatsioonrea põhjal moodustatakse n-elemendiline järjestus

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

$$
z_k = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_{(k)} \text{ kuulub esimesse valimisse,} \\ 1, & \text{kui } x_{(k)} \text{ kuulub teise valimisse.} \end{cases}
$$

Esimese ja teise valimi empiirilised jaotused avalduvad siis valemitega

$$
G_1(x_{(k)}) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{k} (1 - z_i), \quad G_2(x_{(k)}) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{k} z_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.
$$

Statistiku T valimitest leitud väärtus on:

$$
\begin{aligned}
D &= \max_{1 \leq k \leq n} |\, G_1(x_{(k)}) - G_2(x_{(k)}) \,| = \\
&= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{k} (1 - z_i) - \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{k} z_i \right| = \\
&= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{k}{n_1} - \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} z_i \right|.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Analoogiliselt leitakse statistikute T_- ja T_+ väärtused:

$$
D_+ = \max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k}{n_1} - \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} z_i \right),
$$

$$
D_- = \max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} z_i - \frac{k}{n_1} \right).
$$

T-statistikute väärtused ei sõltu valimite elementide väärtustest, vaid kahe valimi elementide arvust ja omavahelisest järjestusest variatsioonreas. Statistikute väärtused saavad olla lõigus $[0, 1]$ ning väärtuse $1/n_1 n_2$ kordsed.

Kui üldkogumite jaotusfunktsioonid on samad, siis on teoreetiliste valimite vahelised järjestused võrdvõimalikud (Conover, 1971, lk 312). Erinevaid järjestusi on võimalik moodustada täpselt nii palju, kui mitmel viisil saab paigutada n_1

esimese valimi elementi $n = n_1 + n_2$-elemendilisse järjestusse. Seega on võimalusi esimese ja teise valimi elementide järjestamiseks kokku

$$C_n^{n_1} = C_n^{n_2} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!\, n_2!}.$$

Iga võimaliku järjestuse tõenäosus üldkogumite ühesuguste jaotuste korral on

$$P\,(\,Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \ldots, Z_n = z_n \;\big|\; H_0\,) = \frac{1}{C_n^{n_1}}, \qquad z_k \in \{0, 1\}.$$

Olgu selliste järjestuste arv, mille korral statistiku T väärtuseks on $d/n_1 n_2$, tähistatud

$$a(\frac{d}{n_1 n_2}, n_1, n_2) = \#(z_1, z_2, \ldots, z_n \big| D = \frac{d}{n_1 n_2}), \quad d \in \{0, 1, \ldots, n_1 n_2\},$$

kus väärtus D on leitud valemi (28) abil.

Seega on üldkogumite ühesuguste jaotuste korral ehk nullhüpoteesi kehtimisel statistiku T teoreetiliseks jaotuseks (vt ka joonis 5):

$$P\,(\,T = \frac{d}{n_1 n_2} \;\big|\; H_0\,) = \frac{a(\frac{d}{n_1 n_2}, n_1, n_2)}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \qquad d = 0, 1, \ldots, n_1 n_2.$$

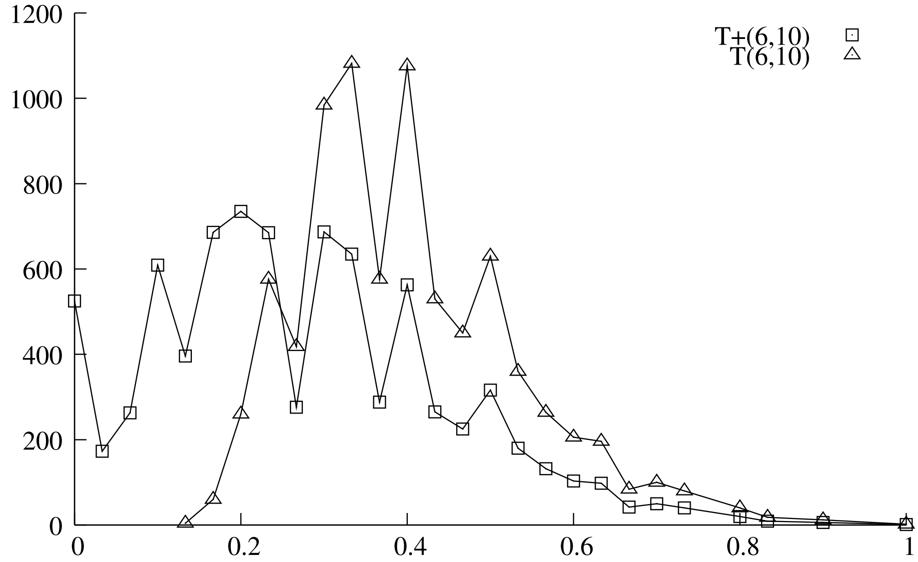
Analoogiliselt saab avaldada ühepoolsete hüpoteeside kontrollimisel kasutatavate statistikute teoreetilised jaotused, kusjuures

$$P\,(\,T_+ = \frac{d}{n_1 n_2} \;\big|\; H_0\,) = P\,(\,T_- = \frac{d}{n_1 n_2} \;\big|\; H_0\,), \quad d = 0, 1, \ldots n_1 n_2.$$

Nullhüpoteesi kehtimisel on statistikute T_+ ja T_- teoreetilised jaotused samad (Conover, 1971).

Näide:

Olgu valimite mahud $n_1 = 1, n_2 = 2$. Kokku on $\frac{3!}{1!\,2!} = 3$ erinevat järjestust esimese ja teise valimi ühise variatsioonrea moodustamiseks.



Joonis 5. *Statistikute T ja T_+ (T_-) teoreetilised esinemissagedused* $n_1 = 6, n_2 = 10$

Võimalikud järjestused ja statistikute väärtused:

$x_{(k)}$	z_k	F_1^k	F_2^k	D_+^k	D_-^k	D^k	
$x_{(1)}$	0	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	
$x_{(2)}$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$x_{(3)}$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	
				$\mathbf{\frac{2}{2}}$	$\mathbf{\frac{0}{2}}$	$\mathbf{\frac{2}{2}}$	←-- *max*

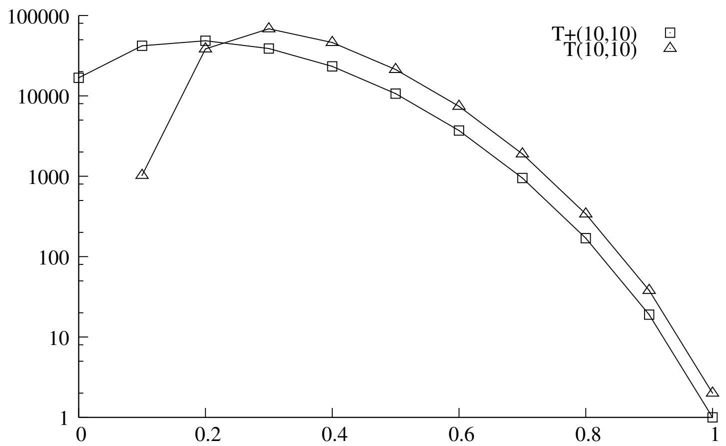
$x_{(k)}$	z_k	F_1^k	F_2^k	D_+^k	D_-^k	D^k	
$x_{(1)}$	1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$x_{(2)}$	0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$x_{(3)}$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	
				$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	←-- *max*

$x_{(k)}$	z_k	F_1^k	F_2^k	D_+^k	D_-^k	D^k	
$x_{(1)}$	1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$x_{(2)}$	1	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	
$x_{(3)}$	0	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	
				$\mathbf{\frac{0}{2}}$	$\mathbf{\frac{2}{2}}$	$\mathbf{\frac{2}{2}}$	←-- *max*

Teststatistikute teoreetilised jaotustabelid $n_1 = 1, n_2 = 2$ üldkogumite samade jaotuste korral:

$D_{+_i}(D_{-_i})$	0	0.5	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

D_i	0	0.5	1
p_i	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$



Joonis 6. *Statistikute T ja T_+ (T_-) teoreetilised esinemissagedused $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ logaritmilisel skaalal*

Asümptootiline teststatistik

Suurte valimimahtude korral langetatakse statistiline otsus asümptootiliste meetodite abil. Tõenäosusele, et teststatistik T saab nullhüpoteesi kehtimisel valimite põhjal arvutatud väärtusest D ekstremaalsema väärtuse, kehtib seos (Hollander ja Wolfe, 1999, lk 179):

$$P\,(\,T \geq D \;\big|\; H_0\,) =$$

$$P\,(\,cT \geq cD \;\big|\; H_0\,) \overset{n_1,n_2\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2(cD)^2}, \tag{29}$$

kus konstant kujul

$$c = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{30}$$

sõltub kasutatud valimimahtudest ja $c \geq 1$, kui $n_1, n_2 \geq 2$.

Tõenäosusele, et teststatistik T_+ omandab nullhüpoteesi kehtimisel valimite põhjal arvutatud väärtusest D_+ ekstremaalsema väärtuse, kehtib asümptootiline lähend (Knuth, 1997, lk 51, 58):

$$P\,(\,T_+ \geq D_+ \,\big|\, H_0\,) =$$
$$P\,(\,cT_+ \geq cD_+ \,\big|\, H_0\,) \overset{n_1,n_2\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2(cD_+)^2}(1 - \frac{2}{3}D_+ + O(1/n)), \qquad (31)$$

kus c on määratud valemiga (30). Kuna statistikute T_+ ja T_- jaotused on nullhüpoteesi kehtimisel samad, kehtib seos (31) ka tõenäosusele, et statistik omandab üldkogumite samade jaotuste eeldusel valimitest arvutatud väärtusest D_- ekstremaalsema väärtuse.

Vt ka Kolmogorovi kriteerium, Smirnovi kriteerium (Kollo, 2004, lk 32).

Asümptootiliselt leitud olulisuse tõenäosusi võib kasutada alates valimimahtudest $n_1, n_2 > 20$.

Kahepoolne hüpotees

Üldkogumite jaotusfunktsioonide erinevuste kontrollimiseks esitatakse järgmine hüpoteeside paar:

$$\begin{aligned} H_0 &: \;\; F_1(x) = F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused on samad,} \\ H_1 &: \;\; F_1(x) \neq F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused on erinevad.} \end{aligned}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\,(\,T(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq D \,\big|\, H_0\,) \leq \alpha,$$

kus D on valimite põhjal valemiga (27) arvutatud teststatistiku T väärtus.

Suurte valimimahtude korral võetakse sisukas hüpotees vastu, kui seose (29) abil leitud olulisuse tõenäosus

$$p_2 = P\,(\,cT(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq cD \,\big|\, H_0\,) \leq \alpha,$$

kus cD on valimite põhjal valemitega (27), (30) arvutatud teststatistiku cT väärtus.

Ühepoolsed hüpoteesid

Kui üldkogumite jaotuste kohta on lisainformatsiooni, siis võib jaotuste erinevuse kontrollimiseks esitada ka ühepoolse hüpoteeside paari:

$$\begin{array}{lll} H_0: & F_1(x) = F_2(x), & \text{üldkogumite jaotused on samad,} \\ H_1: & F_1(x) > F_2(x), & \text{esimeses üldkogumis esinevad} \\ & & \text{väiksemad väärtused sagedamini.} \end{array}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\left(T_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq D_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus D_+ on valimite põhjal valemiga (25) arvutatud teststatistiku T_+ väärtus.

Suurte valimimahtude korral võetakse ühepoolne sisukas hüpotees vastu, kui seose (31) abil leitud olulisuse tõenäosus rahuldab tingimust

$$p_1 = P\left(cT_+(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq cD_+ \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus cD_+ on valimite põhjal (25), (30) abil arvutatud teststatistiku cT_+ väärtus.

Täiendava informatsiooni olemasolul võib jaotuste erinevuse olulisuse kontrollimiseks esitada ühepoolse hüpoteeside paari:

$$\begin{array}{lll} H_0: & F_1(x) = F_2(x), & \text{üldkogumite jaotused on samad,} \\ H_1: & F_1(x) < F_2(x), & \text{teises üldkogumis esinevad} \\ & & \text{väiksemad väärtused sagedamini.} \end{array}$$

Sisukas hüpotees võetakse vastu, kui

$$p_1 = P\left(T_-(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq D_- \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus D_- on valimite põhjal valemiga (26) arvutatud teststatistiku T_- väärtus.

Suurte valimimahtude korral võetakse ühepoolne sisukas hüpotees vastu, kui olulisuse tõenäosus rahuldab tingimust

$$p_1 = P\left(cT_-(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) \geq cD_- \;\middle|\; H_0 \right) \leq \alpha,$$

kus cD_- on valimite põhjal (26), (30) abil arvutatud teststatistiku cT_- väärtus.

2 Rakendusmooduli kirjeldus

Kahe üldkogumi keskmiste tasemete ja jaotuste erinevuse kontrollimiseks on käesoleva töö raames loodud tabelarvustussüsteemi *MS Excel*'i menüüribale lisatav moodul. Moodul on programmeeritud *Visual Basic*'us ja on kooskasutatav õpiku (Jurevitš, 2004) juurde kuuluva sarnaste rakendusprintsiipidega mooduliga.

MS Excel on kujunenud laialtkasutatavaks tabelarvutussüsteemiks, mille sisseehitatud statistikafunktsioonid ja -protseduurid ning diagrammide ja risttabelite konstrueerimise võimalus on sobilikud lihtsamate statistiliste analüüside läbiviimiseks. *MS Excel*'i standardprotseduurid võimaldavad üldkogumite keskmise taseme erinevuste kontrollimiseks kasutada parameetrilisi t- ja F-teste, valminud rakendus lisab võimalused, normaaljaotuse eelduseta üldkogumite analüüsimiseks mitteparameetrilistel meetoditel. Samuti on ühe testi alla koondatud võrdse ja erineva varieeruvusega üldkogumite võrdlemine t-testiga ning F-test, mis lubab kasutajal otsustada dispersioonide erinevuse ning sellest lähtuvalt sobiva t-testi üle.

Valminud *Add-Ins* moodul on kasutatav *MS Excel*'i versioonidega 97, 2000, XP, 2003. Käesoleva töö lõppu on lisatud CD-ROM programmi ja installeerimisjuhistega. Programm on vaba tarkvara ning selle kasutamine peab toimuma vastavalt GPL litsentsi (Free Software Foundation, 1991) tingimustele.

2.1 Testide realisatsioon moodulis

Antud alajaotuses peatutakse mooduli loomise juures tekkinud aspektidel ja kirjeldatakse testide vastuste saamiseks kasutatud meetodeid. Kõigi testide juures esitatakse loetelu testis leitavatest suurustest.

Mooduli sisend- ja väljundandmed

Pärast mooduli installeerimist lisandub *MS Excel*'i alumisele menüüreale nupp „Kahe üldkogumi võrdlus“, millel klikkimine avab abiakna andmete asukoha määramiseks ja sobiva(te) testide valikuks.

„Kahe üldkogumi võrdlus“ valimisel tuleb kasutajal:

- sisestada esimese ja teise valimi andmed;
- märgistada vajadusel valik valimite pealkirjade olemasolu näitamiseks;
- näidata, kas analüüsitavad valimid on sõltumatud või sõltuvad;
- valida testid üldkogumite võrdlemiseks;
- näidata testide tulemuste paigutamise algusväli;
- valida soovi korral lisaselgituste kuvamine, misjärel omab mõtet ka olulisuse nivoo valik.

Kasutajal on võimalik sisestada nii ridades kui ka veergudes paiknevaid andmeid. Valimite pealkirju kasutatakse testide tulemuste alampealkirjades ja selgitavates märkustes. Tühjad lahtrid valimite andmetes arvestatakse puuduvate andmetena ja jäetakse (sõltuvate vaatluste korral ka tema paariline) vaatluse alt välja.

Kui valimid sisaldavad mittearvulisi vaatlustulemusi, siis kuni kümne erineva mittearvulise väärtuse korral palutakse kasutajal need järjestada, st anda neile arvulised vasted.

Mittearvuliste järjestustunnuste korral on võimalik kasutada kuni kümmet erinevat väärtust, kusjuures mittearvuliste väärtuste järjestus tuleb kasutajal mooduli rakendamise käigus avanevas aknas määrata. Osadele erinevatele mittearvulistele väärtustele sama numbrilise koodi, lugedes need väärtused sel teel võrdseteks. Kui erinevaid mittearvulisi vaatlusi on enam kui kümme, siis jäetakse need valimitest välja ning kasutajat informeeritakse vastava teatega ekraanil.

Testimiseks peab olema mõlemas valimis vähemalt kaks vaatlust, sõltuvate valimite korral vähemalt kaks nullist erineva vahega vaatluspaari.

Sõltumatute vaatluste korral on kasutajale valitavad t-, Mann-Whitney U-, Wilcoxoni ja Kolmogorov-Smirnovi testid, sõltuvate vaatluste lahtri märgistamise järel on aga aktiivsed t-, märgi- ja Wilcoxoni astakmärgiteste tellida võimaldavad lahtrid.

Testide vastused paigutatakse kasutaja poolt etteantud lahtrist alates. Testide vastused trükitakse kahele ja lisaselgituste korral neljale veerule, ridade arv sõltub kasutaja poolt valitud testidest, kusjuures testi väljatrüki alla jäävate lahtrite sisu ja vormingud kustutatakse eelnevalt. Testide tulemuste kujundamisel kasutatakse minimaalselt vorminguid - testide pealkirjad väljastatakse poolpaksus kirjas, osade paremaks eraldamiseks kasutatakse tühje ridu ja vajadusel kursiivis alampealkirju, samas ei muudeta töölehtede ridade ja veergude laiusi.

Iga testi väljatrükk koosneb pealkirjast, testis leitud suuruste nimedest, väärtustest ja lisaselgituste korral ka leitud suuruste kirjeldustest. Asümptootiliste statistikute väärtused ja olulisuse tõenäosused leitakse ka väikeste valimimahtude korral, kuid lisaselgitustes viidatakse, millistest mahtudest alates võib tulemusi usaldusväärseteks lugeda. Leitud suuruste väärtused ümardatakse täpsusega neli kohta pärast koma. Mittearvuliste vaatlustulemuste korral väljastatakse lisaks testide vastustele ka mittearvulised väärtused koos neile omistatud arvuliste vastetega. t-testi juures väljastatakse ka valimite peamised arvkarakteristikud.

Lisaselgituste valiku korral väljastatakse sõltuvalt kasutaja poolt valitud olulisuse nivoole otsus statistiliste hüpoteeside kohta:

- $p_2 \leq \alpha \Rightarrow$ üldkogumite keskväärtused on erinevad;
- $p_1 \leq \alpha \Rightarrow$ esimese (või teise) üldkogumi keskväärtus on suurem;
- $p_1 > \alpha \Rightarrow$ üldkogumite keskväärtused ei ole erinevad.

Järeldused sõnastatakse tuginedes üldjuhul täpsetele olulisuse tõenäosustele, asümptootilisi kasutatakse juhul, kui suurtest valimimahtudest tingituna pole võimalik täpseid leida.

t-test

t-testi valimisel väljastatakse järgmised valimite (sõltuvate vaatluste korral ka valimite vahede) parameetrite kirjeldused:

- keskväärtus, standardhälve, standardviga;
- vaatlustulemuste arv valimis;
- sõltuvate vaatluste korral lineaarne korrelatsioonikordaja, nullist erinevate vahedega vaatluspaaride arv.

Sõltumatute vaatluste korral kasutatav t-test väljastatab järgmised suurused:

- t-statistiku väärtus, t-jaotuse vabadusastmete arv, ühe- ja kahepoolsetele hüpoteesidele vastavad olulisuse tõenäosused üldkogumite võrdsete dispersioonide eeldusel;
- t-statistiku väärtus, t-jaotuse vabadusastmete arv, olulisuse tõenäosused üldkogumite erinevate dispersioonide eeldusel;
- F-statistiku väärtus, F-jaotuse vabadusastmete arvud, olulisuse tõenäosused üldkogumite dispersioonide erinevuste hindamiseks.

Valimite keskväärtused ja dispersioonid leitakse *MS Excel*'i standardfunktsioonide *Average* ja *Var* abil.

Teststatistiku väärtus arvutatakse valemist (5). Üldkogumite võrdse varieeruvuse eelduse korral leitakse t-statistikule vastavad olulisuse tõenäosused funktsiooni *TDist* abil.

Üldkogumite erinevate dispersioonide eeldusel leitakse t-jaotuse vabadusastmete arv valemiga (6). Kuna *MS Excel*'i standardfunktsioon *TDist* arvestab ainult vabadusastme täisosa, siis kasutatakse käesolevas rakendusmoodulis täpsete olulisuse tõenäosuste leidmisel t-jaotuse jaotusfunktsiooni esitust kujul (Weisstein):

$$F_\nu(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[I_B\left(1; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\right) - I_B\left(\frac{\nu}{\nu + t^2}; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\right)\right] \operatorname{sgn}(t) =$$
$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\, I_B\left(\frac{\nu}{\nu+t^2}; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\right), & \text{kui } t \geq 0, \\ \frac{1}{2}\, I_B\left(\frac{\nu}{\nu+t^2}; \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\right), & \text{kui } t < 0, \end{cases}$$

kus $I_B(x; a, b)$ on osaline beetafunktsioon, mille väärtus on leitav *MS Excel*'i funktsiooni *BetaDist* abil.

F-statistiku väärtus saadakse valimite dispersioonide suhtest. Olulisuse tõenäosuste leidmiseks kasutatakse funktsiooni *FDist*.

Sõltuvate valimite lineaarne korrelatsioonikordaja leitakse funktsiooniga *Correl*. t-statistiku väärtus leitakse vahede valimist valemi (19) abil, olulisuse tõenäosused leitakse funktsiooni *TDist* abil.

Mann-Whitney U-test

Mann-Whitney U-test on valitav ainult sõltumatute vaatluste korral. Kasutajale väljastatakse järgmised testivastused:

- U_--statistiku väärtus;
- U_+-statistiku väärtus;
- $U = \min(U_-, U_+)$ ehk minimaalne eelnevatest väärtustest;
- olulisuse tõenäosused ühe- ja kahepoolsete hüpoteeside korral;

- standardiseeritud statistiku Z_U väärtus koos selle alusel leitud olulisuse tõenäosustega.

Statistikute U_-, U_+ ja U väärtused leitakse vastavalt valemitega (8), (9) ja (11).

Olulisuse tõenäosuste arvutamiseks on tarvilik leida U_+-statistiku teoreetiline jaotus. Kuna valimimahtude suurenedes kasvab moodustatavate variatsioonridade arv eksponentsiaalselt, siis on U_+-statistiku täpse jaotuse leidmine kõigi võimalike variatsioonridade läbivaatluse teel kasutajale vastuvõetava ajakuluga teostatav kuni kümneelemendiliste valimite korral.

Arvestades rekurrentset seost (12), arvutatakse täpne olulisuse tõenäosus, kui valimite mahud $n_1 \leq 20$ ja $n_2 \leq 100$ või vastupidi. U_+-statistiku väärtuste esinemissagedused leitakse alates valimite mahtudest 1 ja n_2 kuni mahtudeni n_1 ja n_2.

Standardiseeritud U-statistiku väärtus leitakse valemi (13) abil, kusjuures kasutatakse pidevuse parandust (vt nt Campbell). Asümptootilised olulisuse tõenäosused leitakse *MS Excel*'i funktsiooniga *NormSDist*.

Wilcoxoni test

Wilcoxoni testi valimisel kasutaja poolt väljastatakse järgmiste suuruste väärtused:

- valimite astakute summad W_1 ja W_2 ühises variatsioonreas;
- valimite keskmised astakud $\bar{W}_1$ ja $\bar{W}_2$ erinevate mahtudega valimite võrdlemiseks;
- statistikud U_- ja U_+ avaldatuna astakute summade kaudu;
- olulisuse tõenäosused ühe- ja kahepoolsete hüpoteeside korral leituna U-statistikute põhjal;

- standardiseeritud Wilcoxoni statistik Z_W koos selle alusel leitud olulisuse tõenäosustega.

Mõlema valimi elementidest koosnev massiiv järjestatakse kasvavalt ja leitakse esimese ja teise valimi elementide järjekorranumbrite (võrdsete elementide korral kasutatakse nende keskmisis järjekorranumbreid. U-statistikute väärtused leitakse seostega (16) ja (17), nende kaudu leitakse ka testi täpsed olulisuse tõenäosused. Standardiseeritud statistiku väärtus leitakse valemiga (18), arvestades pidevuse parandusega.

Märgitest

Märgitest on kasutajale valitav sõltuvate vaatluste korral. Märgitesti vastuses väljastatakse:

- vaatluspaaride arv N_+, kus üldkogumis muutunud tingimus vähendas tunnuse väärtust;
- vaatluspaaride arv N_-, kus muutunud tingimus suurendas tunnuse väärtust;
- olulisuse tõenäosused ühe- ja kahepoolsete hüpoteeside korral;
- standardiseeritud statistik Z_+ koos selle alusel leitud olulisuse tõenäosustega.

Statistikute N_+ ja N_- väärtused leitakse valemi (20) abil. Olulisuse tõenäosused arvutatakse *MS Excel*'i funktsiooni *BinomDist* abil. Standardiseeritud statistiku Z_+ väärtus leitakse pidevuse parandust lisaks arvestades valemist (21) ning asümptootilised olulisuse tõenäosused funktsiooniga *NormSDist*.

Wilcoxoni astakmärgitest

Wilcoxoni astakmärgitest on valitav sõltuvate vaatluste korral. Kasutajale väljastatakse järgmiste suuruste väärtused:

- negatiivsete vahede astakute summa W_- valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonreas;
- positiivsete vahede astakute summa W_+ valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonreas;
- Wilcoxoni statistik $W = \min(W_-, W_+)$;
- olulisuse tõenäosused ühe- ja kahepoolsete hüpoteeside korral;
- standardiseeritud W-statistik koos selle alusel leitud olulisuse tõenäosustega.

Valimite vahede massiiv järjestatakse elementide absoluutväärtuste kasvamise järjekorras, mille põhjal leitakse positiivsetele ja negatiivsetele vahedelevastavate astakute summad.

Eksponentsiaalse keerukuse tõttu on olulisuse tõenäosused variantide läbivaatuse meetodil arvutatavad vaid väikeste valimimahtude korral. Kasutades rekurrentset seost (23), tuletatakse valimimahu $n \leq 100$ korral Wilcoxoni statistikute esinemissagedused kasvatades järjest valimimahte $1, 2, \ldots, n$, ning saadud jaotusseadusele tuginedes arvutatakse olulisuse tõenäosused.

Standardiseeritud statistiku Z_W väärtus arvutatakse valemiga (24), kusjuures kasutatakse pidevuse parandust. Asümptootilised olulisuse tõenäosused saadakse funktsiooni *NormSDist* kasutades.

Kolmogorov-Smirnovi test

Kolmogorov-Smirnovi testi valimisel väljastatakse kasutajale järgmised väärtused:

- esimese ja teise valimi empiiriliste jaotusfunktsioonide vahe maksimaalväärtus D_+;

- teise ja esimese valimi empiiriliste jaotusfunktsioonide vahe maksimaalväärtus D_-;
- valimite empiiriliste jaotusfunktsioonide maksimaalse erinevuse absoluutväärtus D;
- kahepoolne täpne olulisuse tõenäosus;
- asümptootiliste statistikute cD_+, cD_- ja cD väärtused ja nende põhjal leitud olulisuse tõenäosused.

Mõlema valimi elementidest koosnev massiiv järjestatakse kasvavalt, seejärel liigutakse massiivi algusest lõppu, leides igal sammul juba vaadeldud esimese ja teise valimi elementide osakaalude vahe. Nende vahede maksimaalsed väärtused ongi statistikute väärtusteks.

Täpne kahepoolsele testile vastava olulisuse tõenäosuse leidmine on realiseeritud (R Development Core Team, 2005) algoritmi järgi.

Asümptootilised olulisuse tõenäosused on leitud valemeid (29) ja (31) kasutades.

2.2 Näidete lahendamine rakendusmooduli abil

Käesolevas jaotuses esitatakse rakendusmooduli kasutamisvõimalusi kahel näidisandmestikul.

Näide 1

Uuritakse, kas puhtatõulised ja ristandmesilased on talvitumise või meetoodangu osas erinevad või mitte.

Püstitatakse hüpoteeside paar:

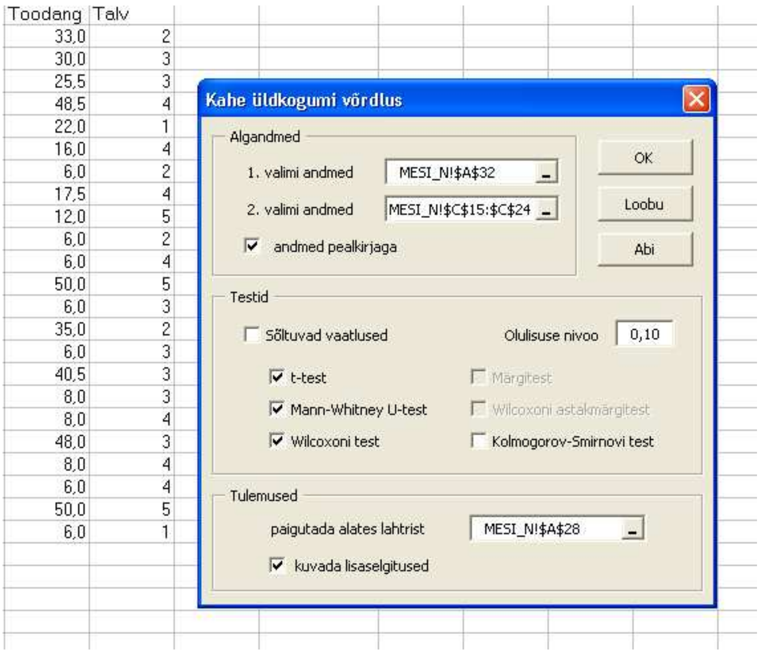
$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ puhtatõuliste ja ristandite meetoodangud ei erine,}$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2, \text{ puhtatõuliste ja ristandite meetoodangud on erinevad.}$$

Üldkogumite kohta järelduste tegemiseks valitakse olulisuse nivoo 0,1.

Mesilaste valimid, kus mesilaspere tõulisus on tähistatud P - puhtatõulised, F - esimese põlve ristandid (Pihlik, 2004, lk 87):

Taru	Tõulisus	Toodang	Talv
1	F	33, 0	2
2	F	30, 0	3
5	F	25, 5	3
6	F	48, 5	4
8	F	22, 0	1
10	F	16, 0	4
14	F	6, 0	2
19	F	17, 5	4
21	F	12, 0	5
22	F	6, 0	2
26	F	6, 0	4
27	F	50, 0	5
30	F	6, 0	3

Taru	Tõulisus	Toodang	Talv
3	P	35, 0	2
4	P	6, 0	3
9	P	40, 5	3
11	P	8, 0	3
13	P	8, 0	4
15	P	48, 0	3
17	P	8, 0	4
23	P	6, 0	4
24	P	50, 0	5
25	P	6, 0	1



Joonis 7. *Mooduli dialoogiaken andmete sisestamiseks ja testide tellimiseks*

Mooduli dialoogiaknasse sisestatakse valimite andmed ja tellitakse testid (joonis 7).

Eeldusel, et valimid on normaaljaotustega, võib tellida t-testi sõltumatute vaatluste korral. t-test korral esitatakse esmalt valimite põhilised arvkarakteristikud (joonis 8).

Valimite kirjeldus		
Valim (Fmesi)		
keskmine	21,4231	valimi (Fmesi) keskväärtus
st.hälve	15,4365	valimi (Fmesi) standardhälve
st.viga	4,2813	valimi (Fmesi) standardviga
n1	13	valimi (Fmesi) maht
Valim (Pmesi)		
keskmine	21,55	valimi (Pmesi) keskväärtus
st.hälve	19,2216	valimi (Pmesi) standardhälve
st.viga	6,0784	valimi (Pmesi) standardviga
n2	10	valimi (Pmesi) maht

Joonis 8. *Valimite kirjeldused t-testi tellimisel*

Sõltumatute valimite korral väljastatakse t-testis tulemused võrdsete kui ka erinevate dispersioonidega valimite korral. Dispersioonide hindamise teststatistiku alusel leitud olulisuse tõenäosus $p_2 = 0,47$ on suurem valitud olulisuse nivoost $\alpha = 0,1$, seega võib otsuste langetamiseks valida t-testi võrdsete hajuvuste korral (joonis 9).

Studenti t-test sõltumatute valimite korral		
Võrdsed üldkogumite dispersioonid		
t	-0,0176	t-statistiku väärtus
df	21	t-jaotuse vabadusastmete arv
p (1-poolne)	0,4931	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,9861	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Erinevad üldkogumite dispersioonid		
t	-0,0171	t-statistiku väärtus
df	17,0059	t-jaotuse vabadusastmete arv (SatterthWaite'i meetodil)
p (1-poolne)	0,4933	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,9866	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
F-test üldkogumite dispersioonide võrdlemiseks		
F	0,6449	F-statistiku ehk valimite dispersioonide suhte (V1/V2) väärtus
f1	12	F-jaotuse 1. vabadusastmete arv
f2	9	F-jaotuse 2. vabadusastmete arv
p (2-poolne)	0,4708	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,1 tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: üldkogumite (Fmesi) ja (Pmesi) keskväärtused ei erine		

Joonis 9. *t-testi väljund sõltumatute valimite korral*

Antud valimite põhjal on t-statistiku väärtuseks $t = -0,02$ ja sellele vastav olulisuse tõenäosus on kahepoolse hüpoteesi korral $p_2 = 0,99$. Seega tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: puhtatõuliste ja esimese põlve ristandite meetoodangud ei ole erinevad (joonis 9).

Mann-Whitney U-test		
U-	66,5	summaarne valimi (Fmesi) elementidest väiksemate valimi (Pmesi) elementide arv
U+	63,5	summaarne valimi (Fmesi) elementidest suuremate valimi (Pmesi) elementide arv
U	63,5	U-statistik min(U-, U+)
p (1-poolne)	0,4879	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,9758	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
zU	-0,062	standardiseeritud U-statistik pidevuse parandusega (n1, n2 > 8)
p (1-poolne; as	0,4753	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne; as	0,9505	asümptootiline olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,1 tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: üldkogumite (Fmesi) ja (Pmesi) keskmised tasemed ei erine		
Wilcoxoni test		
W1	157,5	valimi (Fmesi) astakute summa ühises variatsioonreas
W2	118,5	valimi (Pmesi) astakute summa ühises variatsioonreas
W1/n1	12,1154	valimi (Fmesi) keskmine astak
W2/n2	11,85	valimi (Pmesi) keskmine astak
U-	66,5	U- avaldatud astakute summade W1 ja W2 kaudu
U+	63,5	U+ avaldatud astakute summade W1 ja W2 kaudu
U	63,5	U-statistik Min(U-, U+)
p (1-poolne)	0,4879	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,9758	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
zW	0,062	standardiseeritud Wilcoxoni statistik pidevuse parandusega kasutades valimi (Fmesi) astakute s
p (1-poolne; as	0,4753	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne; as	0,9505	asümptootiline olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,1 tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: üldkogumite (Fmesi) ja (Pmesi) keskmised tasemed ei erine		

Joonis 10. *Mann-Whitney U - ja Wilcoxoni testide tulemused puhtatõuliste ja ristandite meetoodangu erinevuste kontrollimisel*

Mann-Whitney U- ja Wilcoxoni test ei nõua valimite jaotustelt eeldusi. Antud valimite astakute summade keskmised $\bar{W}_1 = 12,1$ ja $\bar{W}_2 = 11,9$ valimitest moodustatud ühises variatsioonreas on väga lähedaste väärtustega. Olulisuse tõenäosus ületab valitud olulisuse nivood $\alpha = 0,1$, seega tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: meetoodangud ei erine (joonis 10).

Kolmogorov-Smirnovi test		
D+	0,2462	empiiriliste jaotusfunktsioonide vahe G(Fmesi)-G(Pmesi) maksimaalväärtus
D-	0,2923	empiiriliste jaotusfunktsioonide vahe G(Pmesi)-G(Fmesi) maksimaalväärtus
D	0,2923	empiiriliste jaotusfunktsioonide G(Fmesi) ja G(Pmesi) maksimaalse erinevuse absoluutväärtus
p (2-poolne)	0,6177	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi G(Fmesi)<>G(Pmesi) korral
cD+	0,5852	statistik cD+
p (G1>G2; as	0,4214	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi G(Fmesi)>G(Pmesi) korral
cD-	0,6949	statistik cD-
p (G1<G2; as	0,3065	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi G(Fmesi)<G(Pmesi) korral
cD	0,6949	statistik cD
p (G1<>G2; a	0,7196	asümptootiline olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi G(Fmesi)<>G(Pmesi) korral
Olulisuse nivool 0,1 tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: üldkogumite (Fmesi) ja (Pmesi) jaotused ei erine		

Joonis 11. *Üldkogumite jaotusi võrdleva Kolmogorov-Smirnovi testi väljatrükk*

Kuna valimite empiiriliste jaotuste võrdlemisel testi kahepoolne olulisuse tõenäosus $p_2 = 0,6 > \alpha$, siis tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: puhtatõuliste ja ristandite meetoodangute jaotused ei erine (joonis 11).

Näide 2

Andmestikus on EPMÜ loomakasvatuse eriala esimese kursuse statistikatesti ja kordustesti tulemused. Testist oli maksimaalselt võimalik saada 12 punkti, alla 7-punktilise tulemuse korral tuli sooritada kordustest. Huvi pakub, kas kordustesti tulemused paranesid võrreldes esimese testiga.

Püstitakse ühepoolsete hüpoteeside paar:

$$
\begin{aligned}
H_0: &\quad \mu_1 = \mu_2, \text{ testi ja kordustesti tulemused ei erine,} \\
H_1: &\quad \mu_1 < \mu_2, \text{ kordustesti tulemused on paremad.}
\end{aligned}
$$

Olulisuse nivooks valitakse $\alpha = 0,05$.

Esimese kursuse üliõpilaste testi ja järeltesti tulemused statistikas:

test	4	5	3	5	4	5	5	5	6	6	6	6	6	3	4	4	5	5	5	5
järeltest	3	3	4	5	7	7	7	7	7	7	7	7	8	9	9	9	9	9	11	11

Valimite kirjeldus		
Valim (test)		
keskmine	4,85	valimi (test) keskväärtus
st.hälve	0,9333	valimi (test) standardhälve
st.viga	0,2087	valimi (test) standardviga
Valim (järeltest)		
keskmine	7,3	valimi (järeltest) keskväärtus
st.hälve	2,2501	valimi (järeltest) standardhälve
st.viga	0,5031	valimi (järeltest) standardviga
Vahe (test)-(järeltest)		
keskmine	-2,45	valimite vahe keskväärtus
st.hälve	2,3503	valimite vahe standardhälve
st.viga	0,5255	valimite vahe standardviga
r	0,0977	valimite lineaarne korrelatsioonikordaja
n	20	paariviisiliste vaatluste arv
n0	19	nullist erinevate vahede arv
Studenti t-test sõltuvate ehk paariviisiliste valimite korral		
t	-4,6619	t-statistiku ehk valimite vahe keskväärtuse standardiseeritud väärtus
df	19	t-jaotuse vabadusastmete arv
p (1-poolne)	0,0001	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,0002	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,05 võib vastu võtta sisuka kahepoolse hüpoteesi: üldkogumite (test) ja (järeltest) keskväärtused on erinevad		

Joonis 12. *Sõltuvate valimite t-testi väljund*

Kui valimite vahe on normaaljaotusega, võib järeldused teha t-testi alusel. Antud valimitest leitud teststatistiku väärtus on $t = -4,66$ ja temale vastav olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral on $p_1 = 0,0001$. Kordustesti tulemused on paremad esimesest testist (joonis 12).

Märgitest		
N+	2	vaatluspaaride arv, kus (test) > (järeltest)
N-	17	vaatluspaaride arv, kus (test) < (järeltest)
n0	19	nullist erinevate vahede arv
p (1-poolne)	0,0004	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,0007	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
z+	-3,2118	statistiku N+ standardiseeritud väärtus pidevuse parandusega (n0 > 10)
p (1-poolne; as	0,0007	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne; as	0,0013	asümptootiline olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,05 võib vastu võtta sisuka kahepoolse hüpoteesi: sõltuvate üldkogumite (test) ja (järeltest) keskmised tasemed on erinevad		
Wilcoxoni astakmärgitest		
W-	182	(test)<(järeltest) astakute summa valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonireas
W+	10	(test)>(järeltest) astakute summa valimite vahede absoluutväärtuste variatsioonireas
W	10	W-statistik min(W-, W+)
n0	19	nullist erinevate vahede arv
p (1-poolne)	0	olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne)	0,0001	olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
zW	-3,5279	W-statistiku standardiseeritud väärtus pidevuse parandust arvestades (n0 > 15)
p (1-poolne; as	0,0002	asümptootiline olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral
p (2-poolne; as	0,0004	asümptootiline olulisuse tõenäosus kahepoolse hüpoteesi korral
Olulisuse nivool 0,05 võib vastu võtta sisuka kahepoolse hüpoteesi: üldkogumite (test) ja (järeltest) keskmised tasemed on erinevad		

Joonis 13. *Märgi- ja Wilcoxoni astakmärgitesti väljatrükk kordustesti paremate tulemuste kontrollimisel võrreldes esimese testiga*

Samuti lubavad ka märgi- ja Wilcoxoni astakmärgitesti tulemused vastu võtta sisuka ühepoolse hüpoteesi: statistika kordustesti tulemused on paremad esialgsest (joonis 13).

Summary

Main Tests for Comparing Two Populations

and an Implementation for *MS Excel*

Anu Iher

Two most common methods for testing differences between two populations are comparing the means and the distributions of the populations. The parametric techniques usually assume normal distributions and make a decision on the calculated parameters of the samples. Nonparametric tests do not require assumptions of the distributions and are usually based on ranked data.

The first section of the paper contains the descriptions of the basic parametrical and nonparametrical tests.

There are four parametrical tests included in the paper: paired t-test, t-tests for comparing means of two independent samples with equal or unequal dispersions and F-test for comparing two dispersions. Among nonparametric tests the Mann-Whitney and Wilcoxon tests for comparing the means of two independent samples and the sign and Wilcoxon signed rank tests for comparing means of two dependent samples are solved. For the distribution comparision of two independent samples the Kolmogorov Smirnov test which is also nonparametric test, is studied.

For each test the following is presented: required assumptions, test statistic(s), theoretical null distribution of the test statistic(s), hypotheses and decision rules.

For the Mann-Whitney and Wilcoxon Signed Rank tests efficient algorithms for computing p-values of the exact theoretical distribution at small to medium sample sizes are given with proof.

Based on the theoretical outcome the application module for *MS Excel* was build. The module is implemented in Visual Basic and is compatible with the *MS Excel* versions 97 and later. The module implements an interactive dialog for selecting data ranges for analyses and statistical tests to perform. The detailed descriptions of the test results can be enabled on the user request. The program is licenced under GPL. The description of the module internals is presented in Section 2 and sample usage of the module is included also.

Kirjandus

Campbell, Russell Bruce. *Continuity correction factor.* `http://www.cs.uni.edu/ campbell/stat/prob9.html, 20.05.2005`.

Conover, William Jay. *Practical Nonparametric Statistics.* New York: Wiley, 1971, 462 lk.

Free Software Foundation, FSF. GNU General Public License. 1991. `http://www.gnu.org/licenses/gpl.html`. Version 2.

Hollander, Myles ja Wolfe, Douglas A. *Nonparametric Statistical Methods.* New York: Wiley, 1999, 787 lk.

Jurevitš, Natalja. *Rakendusstatistika.* Tallinn: Ilo, 2004, 143 lk.

Klotz, Jerome H. *A Computational Approach to Statistics.* 2005, 468 lk. `http://www.stat.wisc.edu/~klotz/Book.pdf, 20.05.2005`.

Knuth, Donald Ervin. *The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms.* Addison-Wesley, 1997, 762 lk.

Kollo, Tõnu. *Monte Carlo meetodid.* Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004, 221 lk.

Parring, Anne-Mai, Vähi, Mare, ja Käärik, Ene. *Statistilise andmetöötluse algõpetus.* Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997, 405 lk.

Pihlik, Priit. *Mesilasemade kasvatamisest : väitekiri põllumajandusteaduste magistrikraadi taotlemiseks loomakasvatuse erialal.* Eesti Põllumajandusülikool, 2004, 126 lk.

Prins, Jack, toim. *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods.* `http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section3/prc31.htm, 20.05.2005`.

R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2005. http://www.R-project.org.

Tiit, Ene-Margit, Parring, Anne-Mai, ja Möls, Tõnu. *Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika*. Tallinn: Valgus, 1977, 470 lk.

Weisstein, Eric W. *"Student's t-Distribution." From MathWorld–A Wolfram Web Resource*.
http://mathworld.wolfram.com/Studentst-Distribution.html, 20.05.2005.